

Kapitel 5

Quarkmodell und starke Wechselwirkung

Die Protonen und Neutronen der Atomkerne, gemeinsam Nukleonen genannt, werden durch Kräfte zusammengehalten, die viel stärker sind als die aus der makroskopischen Welt bekannten Kräfte der Gravitation und des Elektromagnetismus. Alle Teilchen, die dieser ‘Starken Wechselwirkung’ unterliegen, nennt man Hadronen. Wir wissen heute (oder glauben zu wissen), dass Hadronen aus Quarks aufgebaut sind. Wie aus den Eigenschaften der starken Wechselwirkung und der Hadronen auf das Quarkmodell geschlossen wurde, wird im folgenden dargestellt.

5.1 Isospin

5.1.1 Nukleon-Nukleon-Systeme

Ein erster wichtiger Schritt zum Verständnis der Kernkräfte war die Beobachtung, dass die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung ladungsunabhängig ist. Das sieht man zum Beispiel

- in der N-N-Streuung ($N = p$ oder n);
- bei Spiegelkernen, bei denen die Anzahl der Protonen und Neutronen vertauscht sind und die sehr ähnliche Eigenschaften haben. Ein Beispiel für Spiegelkerne sind:

${}^7\text{Li}$ mit (3 p + 4 n),

${}^7\text{Be}$ mit (4 p + 3 n).

Aus diesen Beobachtungen kann man schlussfolgern, dass es eigentlich nur ein Kernteilchen, *das* Nukleon, gibt und dass das Proton und das Neutron nur zwei Zustände dieses Nukleons sind. Tatsächlich haben beide Nukleonen ziemlich ähnliche Eigenschaften, z. B. sind die Massen fast ‘entartet’:

$$M_p = 938.28 \text{ MeV}/c^2 \quad \approx \quad M_n = 939.57 \text{ MeV}/c^2$$

Zwei Zustände eines Nukleons: Das erinnert einen daran, dass ein Teilchen mit Spin 1/2 auch zwei Spineinstellungen bezüglich einer Richtung haben kann: $m_s = \pm 1/2$.

Man kann jetzt den gleichen Formalismus wie beim Spin ausprobieren und sagt, dass Nukleon habe einen ‘Isospin’ $I = 1/2$ und kann entlang einer Achse in einem abstrakten (Isospin-) Raum 2 Einstellungen haben: $I_3 = \pm 1/2$. Dem Proton wird $I_3 = +1/2$ und dem Neutron $I_3 = -1/2$ zugeordnet:

$$|p\rangle = |I = 1/2, I_3 = +1/2\rangle \quad (5.1)$$

$$|n\rangle = |I = 1/2, I_3 = -1/2\rangle \quad (5.2)$$

Wie zwei Teilchen mit Spin $1/2$ können auch Nukleon-Nukleon-Systeme zu Gesamtsospin $I = 1$ (Triplet) oder $I = 0$ (Singulett) koppeln:

N-N	I	I_3	Q	
pp	1	+1	+2	Triplet
nn	1	-1	0	
np	1	0	+1	
np	0	0	+1	Singulett

Isospin-Invarianz der starken Wechselwirkung bedeutet, dass die Matrixelemente nur von I , nicht von I_3 (und damit von der Ladung) abhängen. Zum Beispiel ist das Deuterium, $d = |np\rangle$, ein I -Singulett, das Triplet mit $|pp\rangle$, $|np\rangle$, $|nn\rangle$ wurde nicht beobachtet. Das bedeutet, dass im Isospinzustand mit $I = 1$ die Wechselwirkung nicht zur Bindung ausreicht.

5.1.2 Isospin-Multipletts

Zu einem Isospin I gibt es $2I + 1$ Zustände, $(-I, -I + 1, \dots, +I)$, die sich durch ihre Ladung unterscheiden. Als Beispiele haben wir bereits das Nukleonen-Dublett mit $I = 1/2$ und das NN -Singulett ($I = 0$) und -Triplet ($I = 1$) kennengelernt. Andererseits kann man Hadronen, die sich in Masse und anderen Eigenschaften stark ähneln, je nach Anzahl einen Isospin zuordnen. Zum Beispiel treten die Pionen als Triplet in drei Ladungszuständen auf. Man ordnet ihnen deshalb den Isospin $I = 1$ zu:

	π^+	π^0	π^-
M [MeV/c ²]	139.6	135.0	139.6
I_3	+1	0	-1

Die Ladung und die dritte Komponente des Isospin sind hier gleich. Allgemeiner gilt:

$$Q = I_3 + \frac{B}{2}, \quad (5.3)$$

wobei B hier die Baryonenzahl ist. Die bisher eingeführten Multipletts sind dann:

$I = 1, B = 0$			$I = 1/2, B = 1$			$I = 1/2, B = -1$			$I = 1, B = 2$		
	I_3	Q		I_3	Q		I_3	Q		I_3	Q
π^+	+1	+1	p	+1/2	+1	\bar{n}	+1/2	0	nn	-1	0
π^0	0	0	n	-1/2	0	\bar{p}	-1/2	-1	np	0	+1
π^-	-1	-1							pp	+1	+2

Man könnte vermuten, dass die beiden Nukleonen mit $I = 1/2$ der Fundamentaldarstellung des Isospins entsprechen. Ein entsprechendes Modell, in dem alle Hadronen aus Nukleonen und Antinukleonen aufgebaut sind (Sakata-Modell) hat sich allerdings als inkonsistent mit den Beobachtungen erwiesen. Auf der Suche nach einer Fundamentaldarstellung des Isospins haben Gell-Mann und Zweig vorgeschlagen, dass alle Isospin-Multipletts sich durch Kombination von zwei hypothetischen Teilchen, Quarks, ergeben. Die beiden Quarks unterscheiden sich durch ihre 'Flavour' up (u) und down (d), haben entsprechende Antiteilchen und bilden jeweils Isospindoublets mit folgenden Quantenzahlen:

	I_3	Q	B	Spin
u	+1/2	2/3	1/3	1/2
d	-1/2	-1/3	1/3	1/2
\bar{d}	+1/2	1/3	-1/3	1/2
\bar{u}	-1/2	-2/3	-1/3	1/2

Die Nukleonen und Pionen haben damit folgende Quark-Wellenfunktionen:

$$\begin{aligned} |p\rangle &= |uud\rangle \\ |n\rangle &= |udd\rangle \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= |u\bar{d}\rangle \\ |\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) \\ |\pi^-\rangle &= -|\bar{u}d\rangle \end{aligned} \quad (5.5)$$

Hier ist eine Phasenkonvention benutzt worden, bei der der Zustand mit $I_3=1/2$ als $-|\bar{u}\rangle$ definiert wird. Das π^0 ist eine Linearkombination der beiden isospin-neutralen Zustände $d\bar{d}$ und $u\bar{u}$. Die orthogonale Kombination

$$|\eta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|d\bar{d}\rangle + |u\bar{u}\rangle) \quad (5.6)$$

stellt den Singulett-Zustand dar. Die Isospin-Wellenfunktionen von π^0 und η sind orthogonal, weil das Skalarprodukt der Quarkzustände wie folgt definiert ist:

$$\langle q_i \bar{q}_j | q_k \bar{q}_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{für } (i, j) = (k, l) \\ 0 & \text{für } (i, j) \neq (k, l) \end{cases} \quad (5.7)$$

Also ergibt sich für π^0 und η :

$$\langle \pi^0 | \eta \rangle = \frac{1}{2} (\langle d\bar{d} | d\bar{d} \rangle - \langle u\bar{u} | u\bar{u} \rangle + \langle d\bar{d} | u\bar{u} \rangle - \langle u\bar{u} | d\bar{d} \rangle) = \frac{1}{2} (1 - 1 + 0 - 0) = 0 \quad (5.8)$$

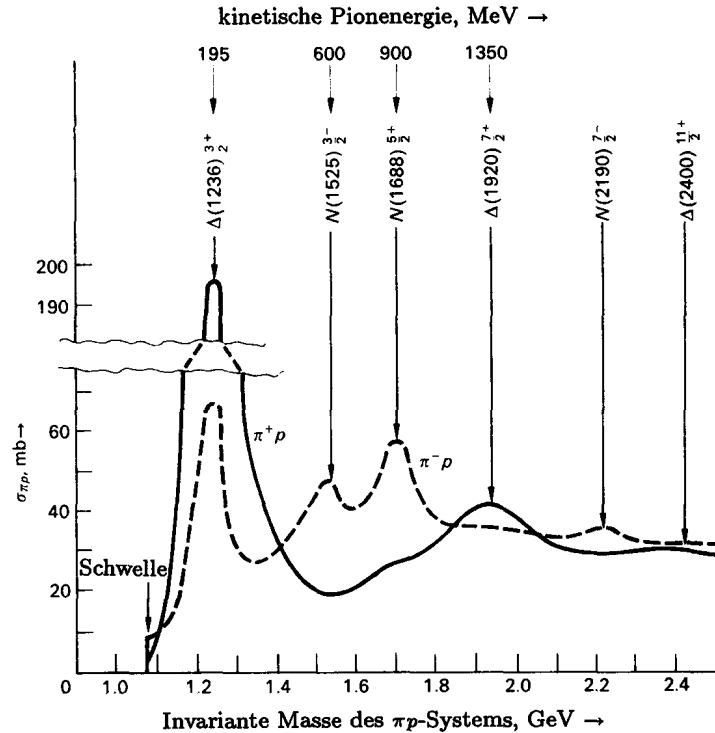


Abbildung 5.1: Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnittes für die Streuung von π^+ - und π^- - Mesonen an Protonen von der Pionenenergie. Das Δ -Symbol bezieht sich auf die $I = 3/2$ -Resonanzen; N sind die Resonanzen mit $I = 1/2$. Es sind nur einige der zahlreichen Zustände mit ihren jeweiligen Spin- und Paritätszuordnungen angegeben.

5.2 Pion-Nukleon-Streuung

Wenn man hochenergetische Protonen auf ein massives Target schießt, werden vor allem Pionen erzeugt. Man kann die Impulse der Pionen filtern und so monoenergetische Pionenstrahlen erzeugen.

Wenn man Pionen an Protonen (in einem Wasserstofftarget) streut, mißt man in Abhängigkeit von der invarianten Pion-Proton-Masse (der Pion-Proton-Schwerpunktsenergie) einen stark strukturierten Wirkungsquerschnitt (siehe Abb. 5.1). Die Überhöhungen entsprechen Resonanzen (siehe Abschnitt 1.5) oder instabilen Teilchen mit einer kurzen Lebensdauer. Der Wirkungsquerschnitt läßt sich als eine Überlagerung von Breit-Wigner-Resonanzkurven (1.138) und einem Untergrundanteil beschreiben. Aus der Massenbreite (bzw. Energiebreite) einer Resonanz von typischerweise etwa 100 MeV ergibt sich mit

$$\tau \cdot \Delta M = 1 \quad (\text{mit } \hbar, c : \tau \cdot \Delta M c^2 = \hbar) \quad (5.9)$$

die für starke Wechselwirkungen typische Lebensdauer:

$$\tau \approx 10^{-23} \text{ s}$$

Anschaulich kann man sich das resonanzartige Verhalten des Wirkungsquerschnittes

wie folgt erklären: Wenn die de-Broglie-Wellenlänge des Pions

$$\lambda = \hbar/p \quad (5.10)$$

gerade ein Protondurchmesser (oder ein Vielfaches) ist, ist das Pion in Resonanz mit dem Proton. Das Resonanzsystem wird durch den Zerfall gedämpft und die Wellenfunktion der Resonanz hat die Form:

$$\psi(t) = \psi(0) \cdot e^{-iE_R t} \cdot e^{-\frac{t}{2\tau}} \quad (5.11)$$

Damit ergibt sich die Zerfallswahrscheinlichkeit zu:

$$I(t) = |\psi(t)|^2 = I(0) \cdot e^{-t/\tau} \quad (5.12)$$

Das Betragsquadrat der Fourier-Transformierten von (5.11) ergibt die Breit-Wigner-Resonanzkurve (1.138).

In der Abb. 5.1 sieht man, dass der Wirkungsquerschnitt für π^+p anders ist als für π^-p . Das ist nicht im Widerspruch zur Ladungsunabhängigkeit der starken Wechselwirkung, sondern ist durch die Isospin-Invarianz zu erklären: Ein Pion mit $I = 1$ kann mit einem Nukleon mit $I = 1/2$ zwei mögliche Isospinzustände einnehmen: $I = 1 + 1/2 = 3/2$ und $I = 1 - 1/2 = 1/2$. Die I_3 -Komponente des Gesamtsystems ergibt sich als Summe der I_3 -Komponenten der einzelnen Teilchen. So gilt:

$$I_3(\pi^+p) = I_3(\pi^+) + I_3(p) = +1 + 1/2 = +3/2 \quad (5.13)$$

$$I_3(\pi^-p) = I_3(\pi^-) + I_3(p) = -1 + 1/2 = -1/2. \quad (5.14)$$

Der Zustand $I_3 = 3/2$ kann nur zu $I = 3/2$ gehören, während für $I_3 = -1/2$ sowohl $I = 3/2$ als auch $I = 1/2$ möglich ist. Da es für beide Isospinzustände unabhängige Streumatrixelemente gibt, sind die Wirkungsquerschnitte für die beiden Kanäle im allgemeinen unterschiedlich (siehe Übungsaufgabe).

Die 1. Resonanz, genannt $\Delta(1236)$, bei einer Masse von etwa 1236 MeV hat $I = 3/2$. Der Spin ist $J = 3/2$, was als ein Zustand von 3 Quarks gedeutet wird, deren Spins alle in eine Richtung weisen und die keinen relativen Bahndrehimpuls haben. Als $I = 3/2$ Zustand muß die Δ -Resonanz in $2I + 1 = 4$ Ladungszuständen vorkommen:

I_3	-3/2	-1/2	+1/2	+3/2
Name	Δ^-	Δ^0	Δ^+	Δ^{++}
Quarks	ddd	udd	uud	uuu

5.3 Farbladung und Quantenchromodynamik

Symmetrie der Δ -Wellenfunktion: Für die Weiterentwicklung der starken Wechselwirkung war die Δ -Resonanz von besonderer Bedeutung. Der Zustand ist völlig symmetrisch bezüglich der Vertauschung von Quarks, obwohl man einen antisymmetrischen Zustand erwartet, weil das Δ ein Fermion ist. Die Symmetrieeigenschaften kann man sich klarmachen, indem man die Wellenfunktion in einen Orts-, Spin- und Isospinanteil zerlegt:

$$\psi_\Delta = \psi_{Ort} \cdot \psi_{Spin} \cdot \psi_{Isospin} \quad (5.15)$$

In einer Übungsaufgabe werden die Symmetrieeigenschaften für eine entsprechende Wellenfunktion eines Nukleon-Nukleon-Systems diskutiert und auf das Deuteron angewendet, das aus Proton und Neutron besteht. Wenn man wie in (5.15) die Isospin-Wellenfunktion einbezieht, kann man Proton und Neutron als identische Teilchen (Fermionen) betrachten, für die ein ‘verallgemeinertes Pauli-Prinzip’ gilt.

Im Falle der drei Quarks, aus denen die Δ -Resonanz besteht, zeigt sich, dass jeder Anteil in (5.15) symmetrisch ist: Der Ortsanteil wegen $L = 0$ (der Grundzustand ist immer symmetrisch), der Spinanteil, weil alle Spins in eine Richtung weisen und der Isospinanteil, weil z.B. der Zustand $|uuu\rangle$ mit drei gleichen Quarks vorkommt. Um das Konzept der Fermi-Statistik zu retten, hat man schließlich eine neue Quantenzahl eingeführt, Farbe oder Color, bezüglich der der Zustand antisymmetrisch ist:

$$\psi_{\Delta} = \psi_{Ort} \cdot \psi_{Spin} \cdot \psi_{Isospin} \cdot \psi_{Farbe} \quad (5.16)$$

Diese Quantenzahl wird heute als die Ladung der starken Wechselwirkung interpretiert, die ihre Formulierung in der Quantenchromodynamik (QCD) gefunden hat. Es gibt drei Farbladungen: rot (r), grün (g) und blau (b). Jedes Quark trägt eine dieser Ladungen, es gibt also zum Beispiel ein rotes, grünes und blaues u -Quark. Hadronen kommen nur als ‘Farb-Singulets’ vor, das heißt, einer Kombination der Ladungen, die ‘weiß’ ergibt. Für Baryonen ist das die antisymmetrische Kombination von rgb , für Mesonen ergibt sich eine Farbwellenfunktion:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(r\bar{r} + g\bar{g} + b\bar{b}). \quad (5.17)$$

Zum Beispiel lautet die Flavour- und Farb-Wellenfunktion des π^+ :

$$|\pi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(u_r\bar{d}_{\bar{r}} + u_g\bar{d}_{\bar{g}} + u_b\bar{d}_{\bar{b}}) \quad (5.18)$$

Die Farbladungen sind für die starke Wechselwirkung verantwortlich. Die Austauschteilchen sind 8 Gluonen, die selbst Träger von Farbladungen sind. Ein Gluon hat immer eine Farbe und eine Antifarbe, zum Beispiel: $r\bar{r}$, $g\bar{g}$, $b\bar{b}$, $r\bar{b}$, ... usw. Von den 9 möglichen Kombinationen sind nur 8 linear unabhängig, deshalb 8 Gluonen.

Quantenchromodynamik: Hier folgt eine kurze, sehr unvollständige Erläuterung, wie man von den Farbladungen zu einer Wechselwirkungstheorie kommt:

Die 8 Farbe-Antifarbe-Zustände können auch als Generatoren einer Farb-Symmetriegruppe gedeutet werden, die 8 unabhängig Drehungen in dem Farbraum erzeugen (wie die räumlichen Drehungen 3 unabhängig Generatoren für die Drehungen um die 3 Raumachsen haben). Wie wir gesehen hatten, entspricht jeder Drehung eine Transformation der Phase der Wellenfunktion. Wenn man alle Phasen gleichzeitig um das gleiche Stück dreht, nennt man das eine globale Transformation. Fordert man andererseits, dass die Drehung eine Funktion des Ortes sein kann und man dennoch eine Invarianz der entsprechenden Hamilton-Funktion (bzw. Lagrange-Funktion) bekommt, dann spricht man von einer lokalen Transformation.

Transformationen, die ortsabhängig sind, führen zu Spannungen zwischen den Punkten, an denen gedreht wird. Man kann sich das vorstellen, als wenn man auf

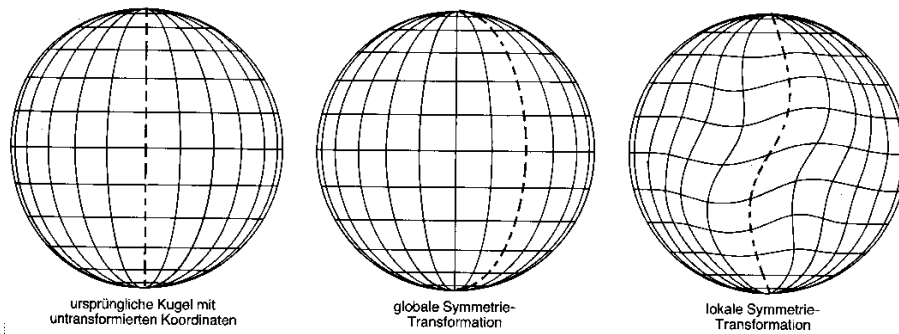


Abbildung 5.2: Globale und lokale Transformation.

der Oberfläche eines Luftballons an zwei Stellen einen Finger aufsetzt und die Finger dann unterschiedlich dreht (eine Drehung des ganzen Ballons wäre eine globale Transformation). Das führt zu einem Faltenwurf auf dem Ballon (Abb. 5.2). Die Falten kann man als Kraftlinien einer Wechselwirkung interpretieren. Um die entsprechende Hamilton-Funktion invariant zu lassen, muß man ein Kraftfeld einbeziehen, das sich entsprechend mittransformieren muß.

Eine lokale Symmetrietransformation nennt man auch eine Eichung und die entsprechende Theorie eine **lokale Eichtheorie**. Die Quantenelektrodynamik (QED) hat das Eichprinzip von der klassischen Elektrodynamik übernommen und auf eine Quantenfeldtheorie angewandt. Da die QED nur einen Generator hat (entsprechend der Symmetriegruppe $U(1)$), der der Ladung entspricht, ist die QED eine ‘abelsche Eichtheorie’. Die QCD mit ihren 8 Generatoren (entsprechend der Symmetriegruppe $SU(3)$) ist entsprechend komplizierter und ist insbesondere eine ‘nicht-abelsche Eichtheorie’.

Das Kraftfeld in der QED ist das Photonenfeld, in der QCD das Gluonenfeld. Entsprechend wird in der QCD die Wechselwirkung durch den Austausch eines oder mehrerer Gluonen beschrieben. Im Gegensatz zur QED wird hier aber Ladung ausgetauscht, weil die Gluonen selbst Ladung tragen. Das Prinzip zeigt folgendes Diagramm: Entsprechend der Feinstrukturkonstanten der QED steht an den Vertices

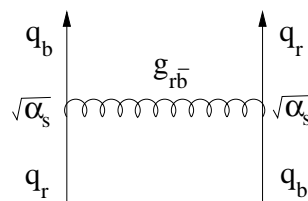


Abbildung 5.3: Quark-Quark-Wechselwirkung über Gluonaustausch.

die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung α_s , die aber eigentlich keine Konstante ist, sondern ‘läuft’: sie wird bei großem Impulsübertrag q^2 immer kleiner (‘asymptotische Freiheit’):

$$\alpha_s(q^2) = \frac{12 \pi}{(33 - 2n_f) \ln q^2/\Lambda^2} \quad (5.19)$$

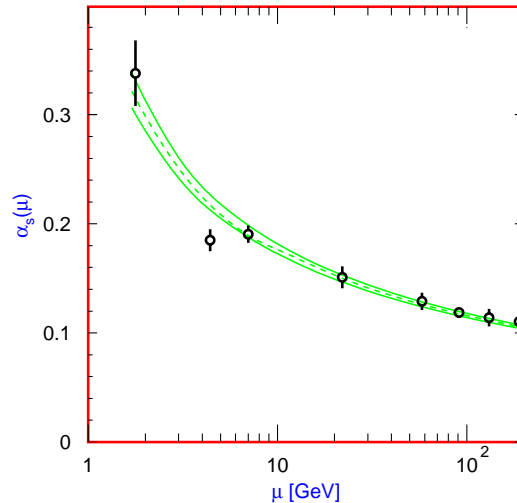


Abbildung 5.4: Messungen der ‐laufenden Kopplungskonstanten‐ α_s der starken Wechselwirkung [PDFG 2006].

Dabei ist n_f die Anzahl der Quarkflavours die in dem jeweiligen Prozess kinematisch erlaubt sind (ausreichende Energie, um die Massen zu erzeugen). Die Konstante $\Lambda \approx 200$ MeV, entsprechend etwa 1 fm, charakterisiert den Übergang zwischen asymptotischer Freiheit und starker Bindung.

Bedingt durch die unterschiedlichen Strukturen der Eichgruppen, haben die Kräfte in der QED und der QCD ein sehr unterschiedliches Verhalten: Während das Potential in der QED bei Separation von zwei Ladungen mit $1/r$ abnimmt, nimmt es in der QCD für große Abstände linear $\sim r$ zu (entsprechend einer konstanten Kraft). Man kann sich das etwa wie ein Gummiband vorstellen, in dem mit zunehmender Separation der Enden immer mehr Energie gespeichert wird. Dieses Kraftgesetz führt dazu, dass Farbladungen wahrscheinlich nicht isoliert auftreten können (‐confinement‐). Weil Quarks eine Farbladung tragen, sind sie ‐confined‐. Für die Entwicklung der Theorie der Quantenchromodynamik, die dieses Verhalten beschreibt, erhielten Gross, Politzer und Wilczek 2004 den Nobelpreis.

Die Energie, die bei einem Streuprozess in einem ‐String‐ (= Gummiband) gespeichert wird, entlädt sich durch Erzeugung von Teilchen, die dann als Hadronen-Jet zu sehen sind (Abb. 5.5). In diesem Fall streut ein Elektron an einem Quark im Proton und das Quark fragmentiert in Hadronen (Abb. 5.6).

In Abb. 3.25 sieht man Jets von einem Quarkpaar, das in einer Elektron-Positron-Reaktion erzeugt wurde (Abb. 5.8a):

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q} \rightarrow 2 \text{ Jets} \quad (5.20)$$

Das Gluon wurde in der Reaktion (Abb. 5.8b)

$$e^+e^- \rightarrow q\bar{q}g \rightarrow 3 \text{ Jets} \quad (5.21)$$

erstmalig 1979 bei DESY beobachtet. Dabei wird ein hartes Gluon aus dem Farbfeld der beiden Quarks abgestrahlt. Das Gluon fragmentiert ähnlich wie die Quarks in Hadronen. Ein charakteristisches 3-Jet-Ereignis ist in Abb. 5.7 gezeigt.

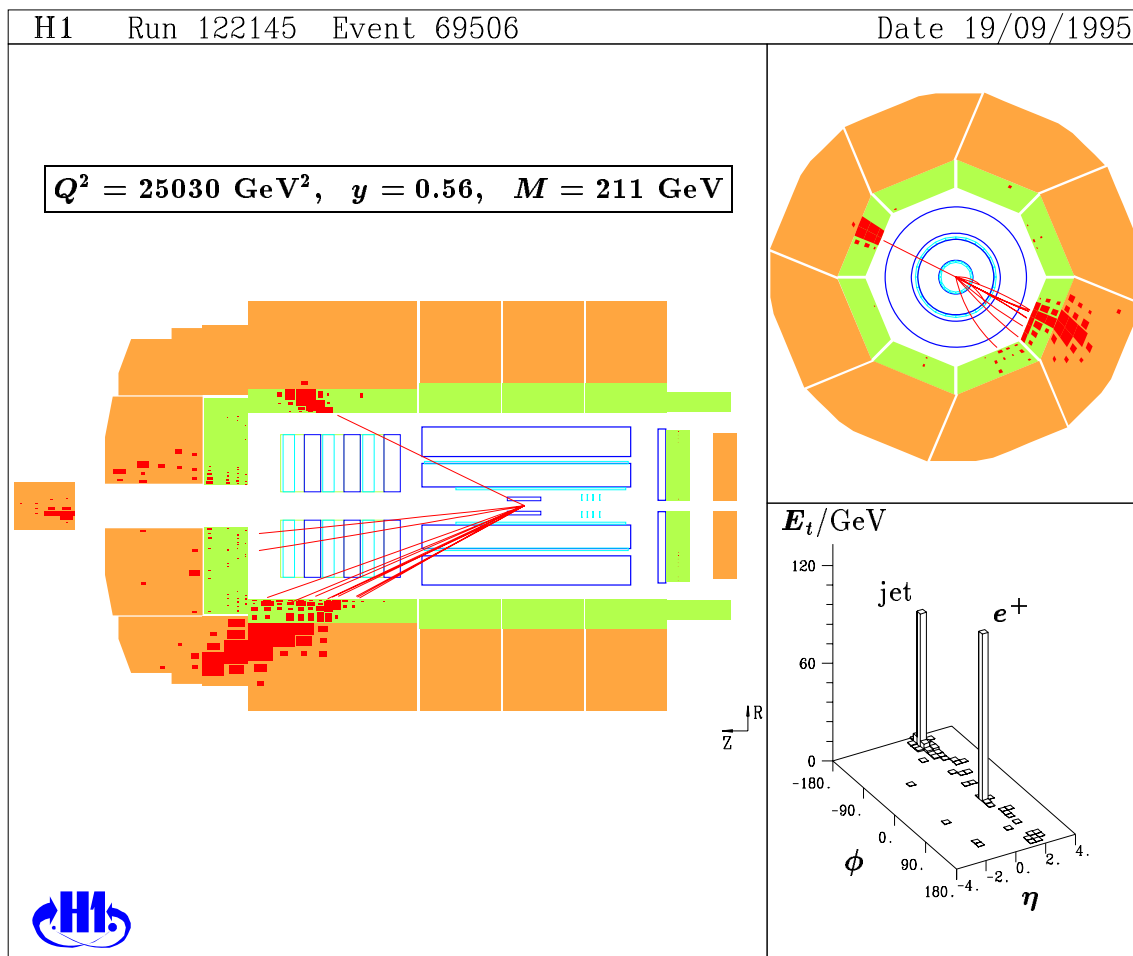


Abbildung 5.5: Tief-inelastische Elektron-Proton-Streuung im H1-Detektor: Das Elektron kommt von links, wird hart zurückgestreut und im elektromagnetischen Kalorimeter nachgewiesen. Das Elektron trifft im Proton, das von rechts kommt, auf ein Quark. Das angestoßene Quark entwickelt einen Hadron-Jet, der vor allem im Hadronkalorimeter nachgewiesen wird.

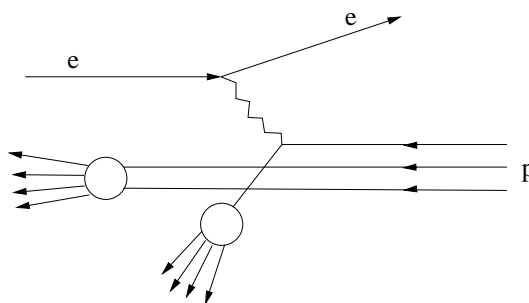


Abbildung 5.6: Elektromagnetische Streuung eines Elektrons an einem Quark im Proton (“tief-inelastische Streuung”).

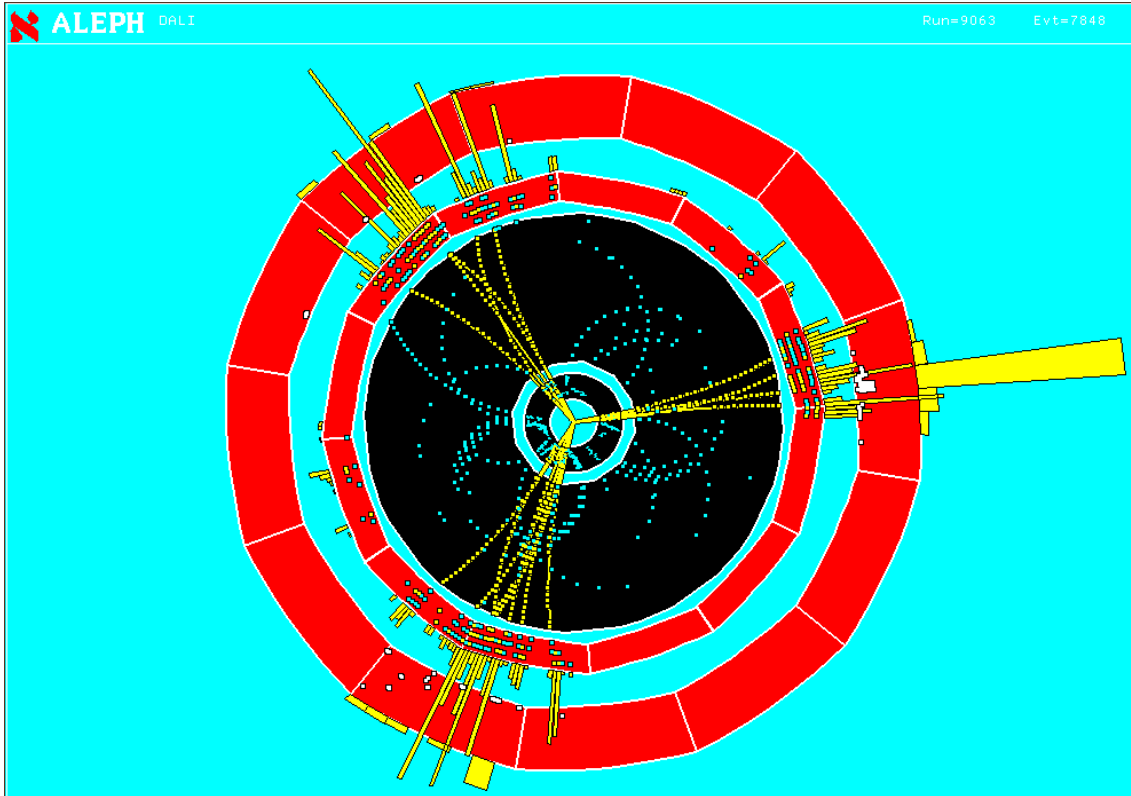


Abbildung 5.7: 3-Jet-Ereignis, das als $q\bar{q}$ -Ereignis mit Abstrahlung eines harten Gluons (siehe Diagramme) interpretiert wird.

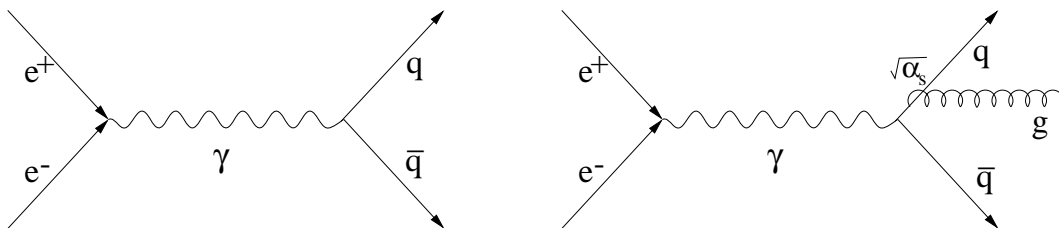


Abbildung 5.8: Jet-Erzeugung in Elektron-Positron-Annihilation: a) Erzeugung eines Quarkpaares in niedrigster Ordnung und b) mit zusätzlicher Abstrahlung eines Gluons.