

Abbildung 1.5: Absorption (Pfeil zeigt auf V , V') und Emission (Pfeil zeigt von V , V' weg) von Teilchen und Antiteilchen an Potentialen V , V' .

Der Energiegewinn an dem Potential V ist $E_1 - E_2 = E_1 + |E_2|$ und die Ladungsbilanz ist $+1 - (+1) = 0$. Die Emission des Teilchens π_2^+ mit negativer Energie ist äquivalent zur Absorption des Antiteilchens π_2^- mit positiver Energie (Abb. 1.5c).

Der elektromagnetischen Strom ist das Produkt von Ladung und Wahrscheinlichkeitsstrom (1.57):

$$j_{em}(\pi^+(p)) = (+e) 2|\phi_0|^2 (+p) = (-e) 2|\phi_0|^2 (-p) = j_{em}(\pi^-(-p)) \quad (1.58)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \text{Absorption eines Teilchens mit } p^\mu &\equiv \text{Emission eines Antiteilchens mit } -p^\mu \\ \text{Emission eines Teilchens mit } p^\mu &\equiv \text{Absorption eines Antiteilchens mit } -p^\mu \end{aligned}$$

1.4.2 Dirac-Gleichung ($s = 1/2$)

Der Grund für die negativen Energien und Wahrscheinlichkeitsdichten bei den Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung ist die Ableitung 2. Ordnung in der Zeit, der $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ -Term. Deshalb versuchte Dirac einen anderen Ansatz, indem er eine Wellengleichung mit folgenden Eigenschaften forderte:

- nur Ableitungen 1. Ordnung in Zeit und Raum;
- Lorentz-Kovarianz;
- Erfüllung der Relation $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Diese Forderungen führten auf den Ansatz:

$$i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = \left(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta \cdot m \right) \psi(x) \quad (1.59)$$

Diese Gleichung kann kovariant geschrieben werden:

$$\left(i \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m \right) \psi = 0 \quad (1.60)$$

Mit dem Vierervektor γ :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \vec{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \cdot \vec{\alpha} \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

Andere Formen der Dirac-Gleichung sind (\not{p} wird gesprochen ‘p-dagger’):

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \psi = 0 \quad (1.62)$$

$$(\gamma \cdot p - m) \psi = 0 \quad (1.63)$$

$$(\not{p} - m) \psi = 0 \quad (1.64)$$

Die Dirac-Gleichung läßt sich nur erfüllen, wenn

- ψ ein 4-komponentiger Spinor ist:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}; \quad (1.65)$$

- die γ^μ 4×4 -Matrizen sind, die den Anti-Kommutator-Relationen

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot I \quad (1.66)$$

genügen ($I = 4 \times 4$ -Einheitsmatrix).

Eine Darstellung der γ -Matrizen ist:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}; \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.67)$$

Dabei sind die Elemente der Matrizen in (1.67) 2×2 -Matrizen:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Die σ^k sind die Pauli-Matrizen, die, mit einem Faktor $1/2$ multipliziert, die Drehimpulsoperatoren für den Drehimpuls $1/2$ sind. Die 4-komponentigen Spinoren beschreiben Teilchen und Antiteilchen jeweils mit den beiden Spinkomponenten ($m_s = \pm \frac{1}{2}$).

Warnung: es gibt verschiedene Darstellungen der γ -Matrizen. Wir folgen hier der Konvention von Bjorken und Drell [22], die zum Beispiel auch in den empfehlenswerten Darstellungen von Aitchison und Hey [26] und Schmüser [27] benutzt wird. Für praktische Rechnungen sollte man immer sicherstellen, daß man eine bestimmte Konvention benutzt.

Der Lorentz-kovariante Wahrscheinlichkeitsstrom ist:

$$j^\mu = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.69)$$

mit dem ‘adjungierten’ Spinor:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0. \quad (1.70)$$

Dabei ist $\psi^\dagger = \psi^{T*}$ der hermitesch konjugierte Spinor (=Zeilenvektor). Mit Hilfe der Dirac-Gleichung läßt sich zeigen, daß Stromerhaltung gilt:

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \quad (1.71)$$

Auch die Dirac-Gleichung hat Lösungen mit positiver und negativer Energie:

$$\psi(x) = u(p, s)e^{-ipx}, \quad E > 0 \quad (1.72)$$

$$\psi(x) = v(p, s)e^{ipx}, \quad E < 0 \quad (1.73)$$

Die Spinoren u und v hängen von dem Viererimpuls p und der Spineinstellung $s = \pm 1/2$ (s ist hier die magnetische Quantenzahl) ab:

$$u(p, s) = \sqrt{E + m} \begin{pmatrix} \phi^s \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m} \cdot \phi^s \end{pmatrix} \quad (1.74)$$

$$v(p, s) = \sqrt{|E| + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|E|+m} \cdot \chi^s \\ \chi^s \end{pmatrix} \quad (1.75)$$

Die ϕ^s und χ^s sind 2-komponentige Spinoren:

$$\phi^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \chi^{-1/2} \quad (1.76)$$

$$\phi^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \chi^{1/2} \quad (1.77)$$

Zum Beispiel ergibt sich im Ruhesystem des Teilchens und Antiteilchens ($\vec{p} = 0$) für $s = +1/2$:

$$u(p, s) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \phi^{1/2} \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

$$v(p, s) = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ \chi^{1/2} \end{pmatrix} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.79)$$

Deutung der Lösungen mit negativer Energie: Entsprechend wie bei den Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung findet man folgende Relationen für Fermionen mit Spin $1/2$:

$$\begin{aligned} \text{Absorption eines Teilchens mit } p^\mu, s &\equiv \text{Emission eines Antiteilchens mit } -p^\mu, -s \\ \text{Emission eines Teilchens mit } p^\mu, s &\equiv \text{Absorption eines Antiteilchens mit } -p^\mu, -s \end{aligned}$$

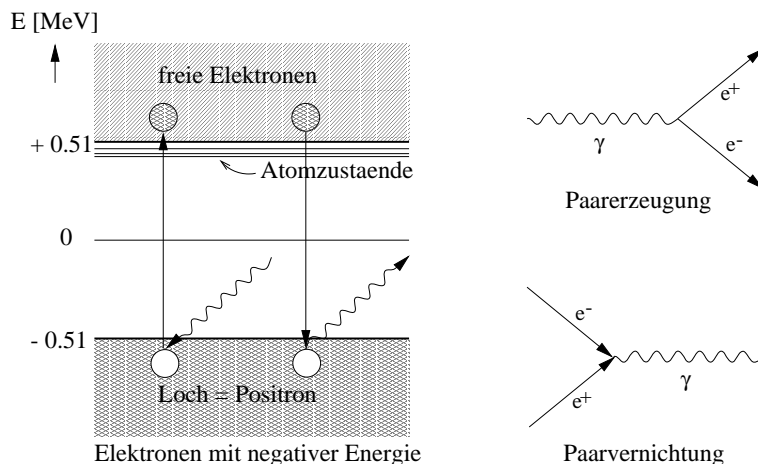


Abbildung 1.6: Dirac’schen Löchertheorie: Übergänge zwischen den Zuständen positiver und negativer Energie sind durch Absorption und Emission von Photonen möglich. Die entsprechenden Graphen auf der rechten Seite werden Feynman-Graphen genannt.

Eine anschauliche (allerdings physikalisch nicht ganz korrekte) Deutung der negativen Energiezustände wird in der Dirac’schen Löchertheorie gegeben: Die Elektronen füllen alle negativen Energiezustände unterhalb $-m_e$ (Dirac-See der Elektronen). Die Energiezustände für freie Elektronen liegen bei Energien $E \geq +m_e$. Ein Photon mit einer Energie, die größer ist als zweimal die Elektronenmasse, $E_\gamma \geq 2m_e = 1.02 \text{ MeV}$, kann ein Elektron aus dem See heben und frei beweglich machen. Das zurückbleibende Loch im See entspricht einem Positron: durch Absorption eines Photons wurde ein Elektron-Positron-Paar erzeugt. Fällt ein Elektron zurück in ein Loch, wird die Energie wieder in Form eines Photons frei, das Paar hat sich vernichtet.

Durch die Einbeziehung eines quantisierten elektromagnetischen Feldes (= Photonfeld) ist die Dirac-Theorie zu der Quantenelektrodynamik (QED) erweitert worden. Wichtige Vorhersagen der QED sind zum Beispiel die Lamb-Shift (siehe Atomphysik) und das anomale magnetische Moment des Elektrons, ausgedrückt durch den Landé’schen g -Faktor, der für das Elektron etwa 2 ist.

Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld: Die Wechselwirkung von Fermionen mit der Ladung q mit einem klassischen elektromagnetischen Feld

$$(A^\mu) = \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} \tag{1.80}$$

(ϕ ist das Coulomb-Potential und \vec{A} das Vektorpotential) kann durch die ‘minimale Substitution’ in die Dirac-Theorie einbezogen werden:

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - qA^\mu \quad (1.81)$$

oder

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + iqA^\mu \quad (1.82)$$

Die Dirac-Gleichung lautet mit dieser Substitution:

$$[\gamma_\mu(p^\mu - qA^\mu) - m] \psi = 0 \quad (1.83)$$

$$[i\gamma_\mu(\partial^\mu + iqA^\mu) - m] \psi = 0 \quad (1.84)$$

Diese Gleichung kann als relativistische Form der Schrödinger-Gleichung für ein Elektron der Ladung $q = -e$ in einem elektromagnetischen Feld betrachtet werden (das Feld ist hier nicht quantisiert, dieser Schritt wird in den Quantenfeldtheorien, QFT, vollzogen). Die Gleichung läßt sich für den nicht-relativistischen Grenzfall entwickeln (siehe zum Beispiel Bjorken und Drell [22], Kap. 1.4):

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left(\frac{(\vec{p} + e\vec{A})^2}{2m} + \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\vec{B} - e\phi \right) \varphi \quad (1.85)$$

Die Wellenfunktion φ ist ein 2-komponentiger Spinor, $\vec{\sigma}$ ist ein Operator mit den Pauli-Matrizen als Komponenten. Das entspricht der Schrödinger-Gleichung für ein Elektron in einem elektromagnetischen Feld mit dem zusätzlichen Term:

$$\Delta E = -\vec{\mu}\vec{B} = \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\vec{B} = 2\mu_{Bohr} s_z B = g\mu_{Bohr} s_z B \quad (1.86)$$

Das ist die Energie des magnetischen Momentes des Elektrons in einem B-Feld in z-Richtung. Gegenüber einer klassischen Betrachtung ergibt die Dirac-Theorie ein um einen Faktor $g = 2$ größeres magnetisches Moment des Elektrons. Der g -Faktor führt dazu, daß der Gesamtdrehimpuls \vec{j} und das damit verbundene magnetische Moment $\vec{\mu}_j$ in Elektronensystemen mit Spin-Bahn-Kopplung nicht mehr parallel sind. Die daraus resultierenden ‘Anomalien’ beobachtet man zum Beispiel beim ‘anomalen’ Zeeman-Effekt.

Das ‘anomale magnetische Moment’ des Elektrons ist mit hoher Präzision gemessen worden. Dabei ist eine leichte Abweichung von $g = 2$ festgestellt worden, die durch Quantenkorrekturen erklärt wird (siehe Abb. 1.7). Die Quantenkorrekturen können in eine Störungsreihe nach Potenzen der Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad (1.87)$$

entwickelt werden. Die genaue Messung von $a = \frac{g-2}{2}$ ist ein Test der Quantenelektrodynamik (QED). Experimentell sind die besten Resultate mit ‘magnetischen Flaschen’, in denen einzelne Elektronen beobachtet werden, erzielt worden (Dehmelt et al., Nobelpreis 1989; siehe ‘Spektrum der Wissenschaft’, Oktober 1980). Der Vergleich mit der Vorhersage der QED zeigt, daß auch die theoretischen Rechnungen eine erstaunliche Präzision erreicht haben:

$$a_{exp} = (11596521869 \pm 41) \cdot 10^{-13} \quad (1.88)$$

$$a_{theo} = (11596521535 \pm 12 \pm 280) \cdot 10^{-13} \quad (1.89)$$

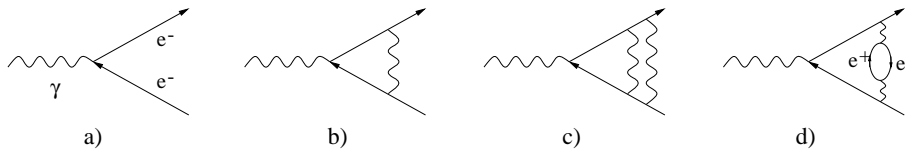


Abbildung 1.7: Beispiele für Quantenkorrekturen (oder ‘Strahlungskorrekturen’) zum magnetischen Moment des Elektrons. In a) ist der einfachste Feynman-Graph für die Ankopplung eines Magnetfeldes (entspricht dem Photon) an das magnetische Moment eines Elektrons gezeigt. Die Graphen b) bis d) sind Beispiele für Korrekturen: b) das Elektron emittiert ein Photon vor der Wechselwirkung und absorbiert es wieder danach (Vertexkorrektur); c) zeigt eine Vertexkorrektur mit zwei ausgetauschten Photonen; in d) fluktuiert ein Photon in ein virtuelles e^+e^- -Paar (Vakuum polarisation). Die Strahlungskorrekturen werden in einer Störungsrechnung nach Potenzen der Feinstrukturkonstanten α entwickelt. Die Graphen entsprechen jeweils einer bestimmten Ordnung in α .

Bei der theoretischen Rechnung wurde hier für die Berechnung der Quantenkorrekturen die Feinstrukturkonstante α mit Hilfe des Quanten-Hall-Effektes bestimmt. Der zweite Fehler in (1.89) stammt von der Ungenauigkeit dieser Messung, der erste Fehler ist die geschätzte Ungenauigkeit der Rechenmethode. Die Differenz zwischen Theorie und Experiment ist nicht signifikant:

$$\Delta a = (33 \pm 28) \cdot 10^{-12}. \quad (1.90)$$

1.5 Wirkungsquerschnitt und Zerfallsbreite

1.5.1 Definition

Der Wirkungsquerschnitt ist die wichtigste Meßgröße in Streureaktionen. Er ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit einer Streuung, die wiederum von Stärke und Art der Wechselwirkungen zwischen den Streupartnern abhängt. Der Wirkungsquerschnitt läßt sich als effektive Fläche, über die die Teilchen wechselwirken, interpretieren. Wir machen uns die Situation an Hand von Abb. 1.8 klar: Der Wirkungsquerschnitt σ sei die Fläche eines Targetteilchens, wie sie ein einfallender Strahl von Teilchen sieht. Die Strahlteilchen nehmen wir zur Vereinfachung als ausdehnungslos an. Der Strahl trifft auf eine Fläche F des Targets mit einer Rate von \dot{N}_{in} . Das Target hat die Länge l , in dem bestrahlten Volumen $V = F \cdot l$ befinden sich

$$N_T = \frac{\rho \cdot V}{A} \cdot N_A \quad (1.91)$$

Targetteilchen. Dabei ist ρ die Targetdichte, A das Atomgewicht und N_A die Avogadro-Zahl. Der Strahl sieht also eine Gesamtfläche der Targetteilchen von $N_T \cdot \sigma$. Die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zu treffen, ist also $N_T \cdot \sigma / F$. Diese Wahrscheinlichkeit kann auch durch die Streu- oder Reaktionsrate \dot{N}_R relativ zu der Rate der einlaufenden Teilchen ausgedrückt werden (für ein ‘dünnes’ Target, d. h. der Strahl

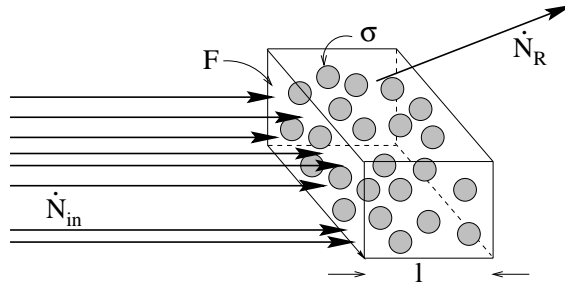


Abbildung 1.8: Zur Definition des Wirkungsquerschnittes



Abbildung 1.9: Kollision von Teilchenstrahlen

wird annähernd nicht geschwächt):

$$w = \frac{\dot{N}_R}{\dot{N}_{in}} = \frac{N_T \cdot \sigma}{F} \quad (1.92)$$

Der Wirkungsquerschnitt ist dann:

$$\sigma = \frac{\dot{N}_R}{\dot{N}_{in}} \cdot \frac{F}{N_T} = \frac{\dot{N}_R}{\dot{N}_{in}} \cdot \frac{A}{\rho \cdot l \cdot N_A} \quad (1.93)$$

Die Reaktionsrate ist in einem Streuexperiment also immer proportional dem Wirkungsquerschnitt. Der Proportionalitätsfaktor ist die Luminosität L :

$$\dot{N}_R = \sigma \cdot L \quad (1.94)$$

In Speicherringen, durchdringen sich zwei entgegengesetzt laufende Teilchenstrahlen mit Strömen I_1 und I_2 und Strahlquerschnitten F an diskreten Wechselwirkungspunkten (Abb.1.9). Die Luminosität ist diesem Fall:

$$L \sim \frac{I_1 \cdot I_2}{F} \quad (1.95)$$

Der Wirkungsquerschnitt hat die Dimension einer Fläche; als Einheit wird das barn benutzt:

$$1 \text{ barn} = 1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad (1.96)$$

Die geometrische Fläche eines Protons ist $\pi r_p^2 \approx 30 \text{ mb}$, was die Größenordnung von Wirkungsquerschnitten aufgrund von Kernkräften angibt. Typisch für die Teilchenphysik sind mb, μb , nb, pb. Dagegen sind atomare Wirkungsquerschnitte viel größer; ihre Größenordnung läßt sich entsprechend durch den Bohrschen Radius a_0 ($a_0 \approx 0.05 \text{ nm}$) abschätzen, $\sigma_{atom} \approx \pi a_0^2 \approx 10^8 \text{ b}$.

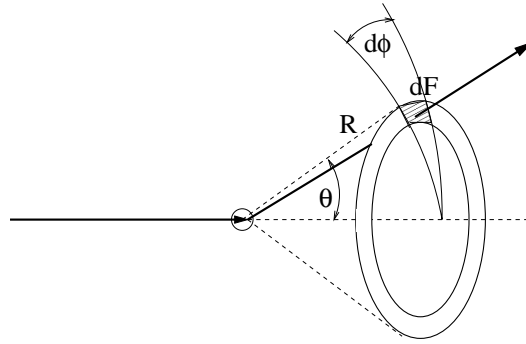


Abbildung 1.10: Raumwinkelement, in das ein Teilchen gestreut wird.

Differentieller Wirkungsquerschnitt: Häufig wird der Wirkungsquerschnitt differentiell in Abhängigkeit von kinematischen Variablen gemessen, zum Beispiel in Abhängigkeit von den Streuwinkeln θ und ϕ . Ein Detektor (Abb.1.10) messe die gestreuten Teilchen in einem Flächenelement dF im Abstand R vom Target, entsprechend einem Raumwinkelement:

$$d\Omega = \frac{dF}{R^2} = d\phi d \cos \theta. \quad (1.97)$$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist durch die Anzahl der Teilchen, die in das Raumwinkelement gestreut werden, entsprechend Gleichung (1.93) gegeben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\dot{N}_{in}} \frac{dN_R}{d\Omega dt} \cdot \frac{A}{\rho \cdot l \cdot N_A} \quad (1.98)$$

Der totale Wirkungsquerschnitt ergibt sich daraus durch Integration über alle Winkel:

$$\sigma_{tot} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d \cos \theta \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (1.99)$$

1.5.2 Beispiele für Wirkungsquerschnittsberechnungen

a) Streuung harter Kugeln: Eine kleine Kugel wird an einer großen Kugel mit Radius R gestreut. Die kleine Kugel fällt mit dem Stoßparameter b ein und wird unter dem Winkel θ gestreut (siehe Abb. 1.11).

Der Stoßparameter läßt sich als Funktion von θ ausdrücken:

$$\frac{b}{R} = \sin \psi = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \cos \frac{\theta}{2} \quad (1.100)$$

$$\Rightarrow db = \frac{R}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \quad (1.101)$$

Ein Streuelement um den Stoßparameter b und in einem Ausschnitt des Azimutwinkels ϕ ist dann:

$$d\sigma = d\phi b db = \left(\frac{R}{2} \right)^2 d\phi d \cos \theta \quad (1.102)$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{R}{2} \right)^2 \quad (1.103)$$

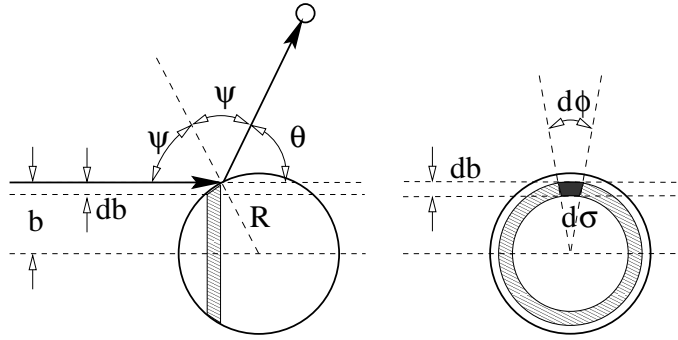


Abbildung 1.11: Streuung an einer harten Kugel.

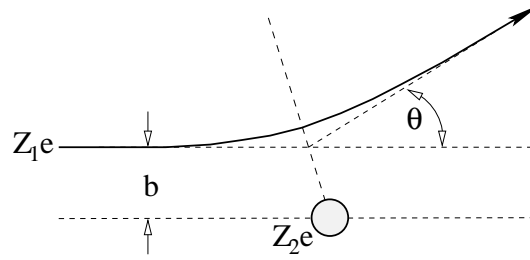


Abbildung 1.12: Rutherford-Streuung

Das heißt der differentielle Wirkungsquerschnitt ist winkelunabhängig, die Winkelverteilung der gestreuten Teilchen ist also isotrop. Wie erwartet ist der totale Wirkungsquerschnitt der Kugelquerschnitt:

$$\sigma_{tot} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \pi R^2 \quad (1.104)$$

b) Rutherford-Streuung (klassisch): Ein Teilchen mit der Energie E und der Ladung Z_1e streut an einem als ortsfest angenommenen Kern mit der Ladung Z_2e , das heißt an dem Streupotential

$$V(r) = \frac{Z_2e}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (1.105)$$

Das Potential entspricht also dem des Kepler-Problems. Die asymptotisch freien Lösungen sind Hyperbel-Bahnen des Streuteilchens (siehe Abb. 1.12). Aus den Hyperbel-Eigenschaften erhält man den Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter b und dem Streuwinkel θ :

$$b = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \cot \frac{\theta}{2} \quad (1.106)$$

Damit ergibt sich analog zu (1.101) und (1.101):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\epsilon_0 2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = (\hbar c)^2 \left(\frac{Z_1 Z_2 \alpha}{4E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}, \quad (1.107)$$

wobei α wie in (1.87) eingesetzt wurde. Wenn $\hbar c = 1$ gesetzt wird, wird die Dimension des Wirkungsquerschnitts (Energie $^{-2}$, z. B. in GeV $^{-2}$). Zur Rückrechnung benutzt man

$$(\hbar c)^2 = 0.3894 \text{ GeV}^2 \text{ mb}. \quad (1.108)$$

1.5.3 Quantenmechanische Behandlung des Wirkungsquerschnitts

Wir behandeln Strahl- und Targetteilchen symmetrisch, für die Reaktionswahrscheinlichkeit kommt es nur auf die Relativgeschwindigkeit zwischen beiden an. Der von den Teilchen gesehene Querschnitt des jeweils anderen Teilchens ändert sich nicht bei einer Transformation entlang der Verbindungslinie zwischen beiden Teilchen – weder bei einer nicht-relativistischen, noch bei einer relativistischen Behandlung (der Wirkungsquerschnitt ist also relativistisch invariant). Allerdings ändert sich im relativistischen Fall die Länge Δl der Teilchenpakete (Abb. 1.13) und damit die Teilchendichte. Ehe wir diesen allgemeineren Fall behandeln, betrachten wir zunächst den nicht-relativistischen Fall.

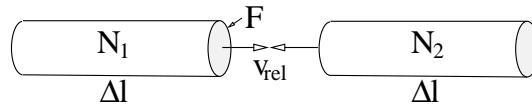


Abbildung 1.13: Kollision von Teilchenpaketen

Nicht-relativistische Behandlung: Sei die Rate der Strahlteilchen, die auf die Fläche F mit N_T Targetteilchen auftreffen, \dot{N}_{in} ; die Rate für den Übergang eines Anfangszustandes $|i\rangle$ in einen Endzustand $|f\rangle$ sei $\dot{N}_R = \dot{N}_R(i \rightarrow f)$. Dann ist der Wirkungsquerschnitt mit Gleichung (1.93):

$$\sigma(i \rightarrow f) = \frac{\dot{N}_R}{\dot{N}_{in} \cdot \frac{N_T}{F}} = \frac{\frac{\Delta N_R}{\Delta t}}{\frac{\Delta N_{in}}{\Delta t} \cdot \frac{N_T \Delta l}{F \Delta l}} = \frac{\frac{\Delta N_R}{\Delta V \Delta t}}{\frac{\Delta N_{in}}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta N_T}{\Delta V} \cdot v_{rel}} = \frac{W_{fi}}{v_{rel}}. \quad (1.109)$$

Der Wirkungsquerschnitt hängt also von der Relativgeschwindigkeit $v_{rel} = \Delta l / \Delta t$ und von der Übergangsrate W_{fi} pro Strahl- und Targetteilchen im Zeitintervall Δt und im Volumen ΔV ab:

$$W_{fi} = \frac{\frac{\Delta N_R}{\Delta V \Delta t}}{\frac{\Delta N_{in}}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta N_T}{\Delta V}} \quad (1.110)$$

Nach Fermi's Goldener Regel gilt:

$$W_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |M_{fi}|^2 \rho_f \quad (1.111)$$

Das Übergangsmatrixelement M_{fi} berechnet sich mit einem nicht-relativistischen Wechselwirkungs-Operator H_{WW} und den Wellenfunktionen der Anfangs- und Endzustände ψ_i, ψ_f als Integral über das Wechselwirkungsvolumen:

$$M_{fi} = \int dV \psi_f^* H_{WW} \psi_i \quad (1.112)$$

Im allgemeinen integriert man über ein Volumen, in dem man die Wellenfunktionen normiert:

$$1 = \frac{1}{V} \int dV \psi^* \psi \quad (1.113)$$

Da sich dieses Volumen am Ende herauskürzt, wird es häufig zu $V = 1$ gesetzt.

Die Größe $\rho_f = dn/dE_f$ ist die Dichte der Endzustände. Je mehr Zustände zur Verfügung stehen, umso wahrscheinlicher wird die Streuung: Jeder realisierbare Zustand $|f\rangle$ hat die gleiche ‘a priori’ Wahrscheinlichkeit und die Wahrscheinlichkeiten addieren sich. Im Impuls-Orts-Raum gibt es einen Quantenzustand pro Elementarzelle der Größe h^3 :

$$\Delta\vec{x} \cdot \Delta\vec{p} = \Delta x \Delta y \Delta z \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3 \quad (= (2\pi)^3 \text{ für } \hbar = 1). \quad (1.114)$$

Die Anzahl der Endzustände ist das auf h^3 normierte Phasenraumvolumen für die k erzeugten Teilchen. Unter Beachtung der Energie- und Impulserhaltung ergibt sich:

$$\rho_f = \frac{dn}{dE_f} = \frac{V}{h^3} \int d\vec{p}_1 \cdot \dots \cdot d\vec{p}_k \delta(\vec{p}_i - \vec{p}_f) \delta(E_i - E_f) \quad (1.115)$$

Der Wirkungsquerschnitt für eine Teilchenreaktion hängt also von drei Faktoren ab: dem Fluß der einlaufenden Teilchen ϕ , einem Übergangsmatrixelement und dem Phasenraum (PS), schematisch:

$$\sigma = \frac{1}{\phi} \cdot |M|^2 \cdot PS. \quad (1.116)$$

Wie im nächsten Paragraph gezeigt wird, kann in einer relativistisch invarianten Formulierung jeder dieser Faktoren separat invariant definiert werden.

Relativistische Behandlung: Das Normierungsvolumen, das bei der Berechnung der Teilchendichten und Phasenraumvolumen auftritt, ist nicht Lorentz-invariant. Wir hatten bereits argumentiert, daß wir nur Boosts entlang der Verbindungslinie der Teilchen zu betrachten brauchen. Die dazu senkrechte Fläche F in Abb. 1.13 ist (wie auch der Wirkungsquerschnitt) bei einem solchen Boost invariant. Dagegen kontrahiert die Länge Δl bei einem Boost gegenüber dem Ruhesystem des Teilchens.

Das Teilchen sieht in Ruhe die Länge $\Delta l = l_2 - l_1$. Wenn es sich mit der Geschwindigkeit $-\beta$ bewegt, transformiert sich diese Länge zu:

$$\Delta l' = l'_2 - l'_1 = \gamma \Delta l - \gamma\beta \Delta t \quad (1.117)$$

Welches Zeitintervall Δt müssen wir einsetzen? Da l_1 und l_2 zur gleichen Zeit gemessen werden muß, entsprechend der Definition einer Länge, muß $\Delta t' = 0$ gelten. Daraus läßt sich das dazugehörige Δt bestimmen:

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \Delta t - \gamma\beta \Delta l = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \beta \Delta l \quad (1.118)$$

In (1.117) eingesetzt ergibt sich:

$$\Delta l' = -\gamma\beta^2 \Delta l + \gamma \Delta l = \gamma(1 - \beta^2) \Delta l = \frac{1}{\gamma} \Delta l = \frac{m}{E} \Delta l \quad (1.119)$$

Diese Lorentz-Kontraktion, die ein bewegter Beobachter sieht, bewirkt, daß sich auch das Volumen kontrahiert:

$$V' = \frac{1}{\gamma} V = \frac{m}{E} V \quad (1.120)$$

Für die Teilchendichte ergibt sich:

$$n' = \frac{E}{mV} \sim E \quad (1.121)$$

Um zu einer Lorentz-invarianten Definition des Wirkungsquerschnittes zu kommen, läßt man $V = 1$ (was sich nachwievor herauskürzt) und normiert stattdessen die Teilchenzustände proportional zu E . Gängig ist zum Beispiel die Normierung auf

$2E$ Teilchen in dem Volumen V .

Die Normierung der kollidierenden Teilchen 1 und 2 wird mit der Relativgeschwindigkeit zu einem Lorentz-invarianten Flußfaktor zusammengefaßt:

$$v_{rel} \rightarrow \phi = 2 E_1 2 E_2 |v_{rel}| = 4 \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (1.122)$$

Die rechte Seite ist, da sie nur Skalarprodukte von Vierervektoren enthält, offensichtlich Lorentz-invariant. Man kann sich zum Beispiel am Fall, daß ein Teilchen in Ruhe ist, klarmachen, daß die rechte Seite tatsächlich $4E_1 E_2 |v_{rel}|$ ergibt.

Ebenso wird das Matrixelement Lorentz-invariant definiert, indem die Wellenfunktionen Lorentz-invariant normiert werden, zum Beispiel auf $2E$, und Lorentz-Invarianz des Wechselwirkungsoperators verlangt wird.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Endzustandsdichte Lorentz-invariant definiert werden kann. Wir betrachten wieder die elementare Zelle im Phasenraum, die einen Quantenzustand enthält (1.114):

$$\Delta \vec{x} \cdot \Delta \vec{p} = V \Delta p_x \Delta p_y \Delta p_z = h^3 \quad (= (2\pi)^3 \text{ für } \hbar = 1). \quad (1.123)$$

Das Volumen wird durch einen Lorentz-invarianten Ausdruck ersetzt:

$$V \rightarrow \frac{V}{2E} \quad (1.124)$$

Die Anzahl der Zustände in einem Impulsintervall $d^3 \vec{p}_{fj}$ für jedes Teilchen j im Endzustand $|f\rangle$ ist:

$$dn_{fj} = \frac{V}{2E_j} \frac{d^3 \vec{p}_{fj}}{h^3} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_{fj}}{2E_j} \quad (\text{mit } V = 1, \hbar = 1) \quad (1.125)$$

Der Ausdruck $d^3 \vec{p}_{fj}/(2E_j)$ ist ein 'Lorentz-invariantes Maß'. Damit wird der Lorentz-invariante Phasenraum ('Lips') für einen Zustand $|f\rangle$ mit n Teilchen und der Schwerpunktsenergie \sqrt{s} definiert:

$$dLips(s, p_{f1}, \dots, p_{fn}) = (2\pi)^4 \delta^4(p_{f1} + \dots + p_{fn} - p_{i1} - p_{i2}) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \vec{p}_{fj}}{(2\pi)^3 2E_j} \quad (1.126)$$

Der Wirkungsquerschnitt läßt sich schließlich wie folgt Lorentz-invariant schreiben:

$$d\sigma = \frac{1}{\phi} |M_{fi}|^2 dLips(s, p_{f1}, \dots, p_{fn}). \quad (1.127)$$

Um den totalen Wirkungsquerschnitt zu berechnen, muß das Matrixelement, das im allgemeinen von dem Endzustandsvariablen abhängig ist, über den Phasenraum integriert werden:

$$\sigma_{tot}(i \rightarrow f) = \frac{1}{\phi} \int_{PS} |M_{fi}|^2 dLips(s, p_{f1}, \dots, p_{fn}). \quad (1.128)$$

Differentielle Wirkungsquerschnitte erhält man, indem über die Variablen, nach denen differenziert wird, nicht integriert wird. Häufig ist dazu eine Variablentransformation notwendig: zum Beispiel würde man auf Kugelkoordinaten transformieren, wenn man Winkelverteilungen berechnen will.

Statistischer Faktor: Abhängig davon, wie die Matrixelemente definiert werden, kann ein statistisches Gewicht auftreten, wenn verschiedene Zustände, wie zum Beispiel verschiedene Spineinstellungen, im Anfangs- oder Endzustand nicht unterschieden werden. Allgemein gelten folgende Regeln:

1. Über Anfangszustände i ist das quadrierte Matrixelement zu mitteln:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{n_i} \sum_{i=1}^{n_i} |M_{fi}|^2. \quad (1.129)$$

2. Über die möglichen Endzustände wird summiert, weil jeder mögliche Zustand die Reaktionswahrscheinlichkeit erhöht. Falls zum Beispiel bei zwei Teilchen im Endzustand mit Spins s_1 und s_2 die Dynamik unabhängig vom Spinzustand ist, ergibt sich für die Summation über die Endzustände:

$$\sum_{f=1}^{n_f} |M_{fi}|^2 = (2s_1 + 1)(2s_2 + 1) |M_{fi}|^2. \quad (1.130)$$

Dabei sind die Faktoren $2s_i + 1$ die Spin-Multiplizitäten.

3. Identische Teilchen im Endzustand: Falls im Endzustand n identische Teilchen auftreten, kann von den $n!$ kombinatorisch möglichen Zuständen jeweils nur der (total) anti-symmetrische für Fermionen und der (total) symmetrische Zustand für Bosonen realisiert werden. Das Quadrat des Matrixelementes erhält dann einen statistischen Faktor $1/n!$. Man muss allerdings darauf achten, dass dieser Faktor nicht bereits in den Wellenfunktionen enthalten ist.

1.5.4 Zerfallsbreite und Lebensdauer

Eine spezielle Teilchenreaktion ist der Zerfall eines Teilchens. Die Zerfallswahrscheinlichkeit λ ist gleich der inversen Lebensdauer:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \quad (1.131)$$

Der Zerfall eines Teilchens ist ein statistischer Prozess. In jedem Zeitintervall dt ist die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall eines Teilchens gleich:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda \cdot n \quad (1.132)$$

Daraus ergibt sich das bekannte Exponentialgesetz für Zerfälle:

$$n = n_0 \cdot e^{-\lambda t} = n_0 \cdot e^{-t/\tau} \quad (1.133)$$

Die Lebensdauer τ ist die mittlere Zeit, nach der das Teilchen zerfällt. Mit der zeitlichen Unschärfe τ ist eine Energieunschärfe ΔE verbunden:

$$\tau \cdot \Delta E \approx \hbar (= 1) \quad (1.134)$$

Deshalb wird eine Zerfallsbreite $\Delta E = \Gamma$ definiert:

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{1}{\tau} = \lambda \quad (1.135)$$

Zerfallsbreite und Zerfallswahrscheinlichkeit sind also äquivalent. Die Zerfallswahrscheinlichkeit ist die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten in alle m möglichen Endzustände $|f\rangle$:

$$\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_m \quad (1.136)$$

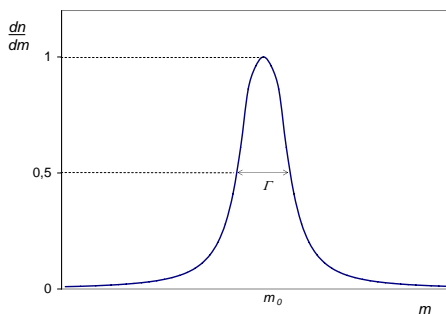
Die Γ_f nennt man partielle Breiten und $B_f = \Gamma_f/\Gamma$ ist das Verzweigungsverhältnis in den Zustand $|f\rangle$.

Relativistisch invariant wird eine partielle Breite entsprechend dem Wirkungsquerschnitt (1.127) hingeschrieben, wobei lediglich der Fluß durch die Normierung der Wellenfunktion des Zerfallsteilchens ($2m$ im Ruhesystem) ersetzt wird:

$$d\Gamma(i \rightarrow f) = \frac{1}{2m} |M_{fi}|^2 dLips(s, p_{f1}, \dots, p_{fn}). \quad (1.137)$$

Die partielle Breite $\Gamma(i \rightarrow f)$ und differentielle Breiten erhält man durch die entsprechende Integration des Matrixelementes über den Phasenraum.

Für die starke Wechselwirkung sind Lebensdauern von $\tau \approx 10^{-23}$ s typisch. Das entspricht Breiten von $\Gamma \approx 100$ MeV, was vergleichbar mit den Massen der beteiligten Teilchen wird. Die kinematisch aus den Zerfällen rekonstruierten Massen folgen einer Resonanzkurve (Breit-Wigner-Kurve, hier die nicht-relativistische Variante), deren Breite durch Γ gegeben ist:



$$\frac{dn}{dm} \sim \frac{\Gamma}{(m - m_0)^2 + \Gamma^2/4} \quad (1.138)$$

Abbildung 1.14: Resonanzkurve