Einführung

Kern- und Teilchenphysik oder auch **'Subatomare Physik'** betrachtet die Struktur der Materie bei kleinsten Abständen. Fragen, die ein Antrieb sein können, die Struktur der Materie und die Kräfte, die sie zusammenhält, zu erforschen:

- Woraus besteht das Universum, wie ist es entstanden und wohin wird es sich entwickeln?
- Was ist Materie, was ist um uns herum, woraus sind wir gemacht?
- Was ist es, was die Welt im Innersten zusammenhält?
- Wie kommt es zu der im Makrokosmos beobachteten Vielfalt der Naturerscheinungen: Schöpfung aller Einzelheiten oder **Vielfalt durch Kombination einfacher Elemente**?

Körnige Struktur der Materie: Die Erfahrung aus der Beobachtung der Natur zeigt: Die Materie ist aus einfachen Elementen aufgebaut, die zu komplexen Systemen mit Substrukturen führen, zum Beispiel beruht das Periodische System der Elemente auf den Atombausteinen. Typische Größenordnungen sind:

Atom:	$r \approx 10^{-10}\,m$
Kern:	$r \approx 10^{-14} - 10^{-15}\,m$
Kernbausteine:	$r \approx 10^{-15}\,m$ (Proton, Neutron)
Elementarteilchen:	$r < 10^{-18}\,m$ (Elektronen, Quarks)

Die Kernbausteine Proton und Neutron sind ausgedehnt, haben Struktur. Elektronen und Quarks könnten punktförmig und elementar sein!?

Warum hohe Energien? Wie kann man Ausdehnung und Struktur im Mikrokosmos messen? Die Unschärferelation gibt einen Zusammenhang zwischen auflösbarem Abstand und Impuls an:

$$\Delta r \cdot \Delta p \geq \hbar$$

Weil ein Teilchenimpuls über $p = h/\lambda$ mit der Teilchenwellenlänge verknüpft ist, gilt zum Beispiel für Photonenenergien:

$$E = h\nu = h \cdot c/\lambda = p \cdot c$$

Damit läßt sich die Unschärferelation auch schreiben:

$$\Delta r \cdot \Delta E \geq \hbar \cdot c$$

Zum Beispiel folgt für $\Delta r = 10^{-18}$ m:

$$E \approx \frac{\hbar \cdot c}{\Delta r} \approx 200 \text{ GeV},$$

wobei $\hbar \cdot c = 197\,\text{MeV} \cdot 10^{-15}\,\text{m}$ benutzt wurde. Diese Energie erreicht ein Teilchen mit der Elementarladung e, wenn es eine Spannung von rund $200 \cdot 10^9$ V durchläuft ($\rightarrow$ große Beschleunigeranlagen).

Energieabschätzungen:

Chemie der Atomhülle:	$\sim$ eV	(H-Ionisation: 13 eV)
Kernphysik:	$\sim$ MeV $= 10^6$ eV	(Bindungsenergien der Nukleonen)
Kernbausteine:	$\sim$ GeV $= 10^9$ eV	($E = m \cdot c^2 \approx 1$ GeV für Nukleonen)
heutige Energien:	$\sim$ TeV $= 10^{12}$ eV	(Substrukturen?)

Wechselwirkungen (WW): Bindungen der Teilchen beruhen auf Wechselwirkungen (=Kräften). Ohne Wechselwirkungen mit einem Detektor könnten wir auch nichts wahrnehmen. Zum Beispiel sehen wir ein Objekt, weil Licht mit dem Objekt und dem Auge wechselwirkt. Die bisher bekannten Wechselwirkungen sind:

- Gravitation
- elektromagnetische WW
- schwache WW
- starke WW

Im Makrokosmos erfahren wir die Gravitation und die elektromagnetische Wechselwirkung, während im Mikrokosmos die elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung die wesentliche Rolle spielen.

Die Materie und ihre Wechselwirkungen (mit Ausnahme der Gravitation) werden heute durch ‘Quantenfeldtheorien’ (z.B. die Quantenelektrodynamik) beschrieben, die auf der

Quantentheorie und **Relativitätstheorie**

basieren. Die theoretischen Bemühungen in der Elementarteilchenphysik werden wesentlich durch die Suche nach einer **vereinheitlichten Theorie** für alle Wechselwirkungen und Teilchen bestimmt. Ein besonderes Problem stellt dabei die Einbeziehung der Gravitation, beschrieben durch die Allgemeine Relativitätstheorie, dar.

Ziel der Vorlesung:

- Einführung in die subatomare Struktur der Materie und ihre Wechselwirkungen;
- phänomenologisch orientiert (Experimente, Meßmethoden, Modelle);

- in dem Teilchenphysik-Teil werden neueste Erkenntnisse und Konzepte der Grundlagenforschung behandelt;
- dagegen werden in der Kernphysik eher die Anwendungen in Technik, Medizin, Geologie usw. betont.

Die wichtigen Beiträge der Teilchenphysik zum Verständnis der Entwicklung des Universums können hier nur gestreift werden.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Einheiten

Als Energieeinheit wird

$$1\,\mathrm{eV} = 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

verwandt. Massen lassen sich dann in GeV/c^2 und Impulse in GeV/c messen (entsprechend den Relationen $E = m\,c^2, E = p\,c$).

In der Elementarteilchenphysik (weniger in der Kernphysik) benutzt man aus Gründen der Vereinfachung ein Einheitensystem (oft 'natürliches Einheitensystem' genannt), in dem die Naturkonstanten **Lichtgeschwindigkeit** [34]

$$c = 2.99792458 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$$

und **Plancksche Konstante** [34]

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05457168(18) \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} = 6.58211915(56) \cdot 10^{-22}\,\mathrm{MeV\,s}$$

gleich 1 gesetzt werden:

$$\hbar = c = 1$$

Damit wird die Unschärferelation:

$$\Delta r \cdot \Delta p \geq 1 \quad \text{und} \quad \Delta t \cdot \Delta E \geq 1 \tag{1.1}$$

Mit $\hbar = c = 1$ ergibt sich, daß sich Zeiten und Längen in einer einzigen Einheit ausdrücken lassen. Zum Beispiel können Zeit und Länge als reziproke Energien ausgedrückt werden:

$$1\,\mathrm{s} = 1.52 \cdot 10^{24}\,\mathrm{GeV}^{-1}$$
$$1\,\mathrm{m}^2 = 2.58 \cdot 10^{31}\,\mathrm{GeV}^{-2}$$

Statt GeV kann man auch m oder s als 'Basiseinheit' wählen. Man kann immer in SI-Einheiten zurückrechnen, indem man mit eindeutig bestimmten Potenzen $c^n \hbar^m$ (= 1 !) multipliziert. Beispiel:

$$2.58 \cdot 10^{31}\,\mathrm{GeV}^{-2} \cdot \hbar^2 c^2 = 1\,\mathrm{m}^2$$

Nützlich sind in diesem Zusammenhang insbesondere die folgenden Beziehungen:

$$\hbar = 6.58 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{GeV\,s}, \qquad \hbar c = 0.197\,\mathrm{GeV} \cdot \mathrm{fm}$$

mit der Längeneinheit Femtometer = Fermi = fm = 10^{-15} m ($\approx$ Protonradius).

1.2 Relativistische Kinematik

1.2.1 Masse-Energie-Beziehung

Die Forderung, daß in jedem Inertialsystem die Form der Naturgesetze gleich ist und der experimentelle Befund, daß die Lichtgeschwindigkeit in jedem System die gleiche ist, führt zu der Formulierung der **Speziellen Relativitätstheorie**. Bei kleinen Geschwindigkeiten (v $\ll$ c) ist die klassische Mechanik eine gute Näherung. 'Relativistisch' muß gerechnet werden, wenn

- v $\approx$ c;
- Energie-Masse-Umwandlungen stattfinden.

Energie-Masse-Umwandlungen finden nach der Einstein-Beziehung statt:

$$E = m_r c^2; \qquad m_r = \text{relativistische Masse.}$$

Allgemeiner gilt:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2; \qquad m_0 = \text{Ruhemasse.} \tag{1.2}$$

Im folgenden benutzen wir für m immer die Ruhemasse, die eine vom Bezugsystem unabhängige (invariante) Teilcheneigenschaft ist:

$$m = m_0$$

1.2.2 Kinetische Energie

Ausgehend von Gleichung (1.2) kann man für kleine Impulse bzw. Geschwindigkeiten folgende Entwicklung machen:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^{\,2}c^2} = mc^2\sqrt{1 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{m^2c^2}} \approx mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} = mc^2 + E_{kin}^{NR} \quad \text{für } p \ll mc. \tag{1.3}$$

Allgemein wird definiert:

$$E = mc^2 + T, \tag{1.4}$$

wobei mc^2 die Ruheenergie und T die kinetische Energie ist. Die typischen Energien in der Kern- und Teilchenphysik sind:

Kernphysik:	$mc^2 \gg T$
'Mittelenergiephysik':	$mc^2 \approx T$
Teilchenphysik:	$mc^2 \ll T$

In dem Einheitensystem mit $c = 1$ ergibt sich aus Gleichung (1.2):

$$m^2 = E^2 - \vec{p}^{\,2} \tag{1.5}$$

Für große Energien, $E \gg m$ gilt:

$$E \approx |\vec{p}|,$$

d.h. E, $\vec{p}$ haben die gleichen Zahlenwerte, wenn sie entsprechend in MeV und MeV$/c$ gemessen werden. Ebenso haben für $\vec{p} = 0$ Energie und Masse, gemessen in MeV$/c^2$ die gleichen Zahlenwerte. Zum Beispiel ist die Masse des Protons etwa 938 MeV$/c^2$.

1.2.3 Vierervektoren und Lorentz-Invarianten

'Lorentz-Invarianten' sind Größen, die in jedem Inertialsystem gleich bleiben, zum Beispiel ist die Teilcheneigenschaft 'Masse' eine Lorentz-Invariante:

$$m^2 = E^2 - \vec{p}^{\,2} = E'^2 - \vec{p}'^{\,2} \tag{1.6}$$

Lorentz-Invariante können als Skalarprodukt von 'Vierervektoren' geschrieben werden. Der 'Viererimpuls', zum Beispiel, läßt sich auf folgende Arten schreiben:

$$p = \begin{pmatrix} E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ (c)\vec{p} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

und der Raum-Zeit-Vektor:

$$x = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (c)t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Aus der Invarianz der Lichtgeschwindigkeit folgt, daß eine sphärische Lichtausbreitung in jedem Inertialsystem gleich gesehen wird:

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 \tag{1.9}$$

Diese Relation benutzt man zur Definition eines Skalarproduktes:

$$x^2 = x \cdot x = x_0^2 - \vec{x}^{\,2} = x_\mu x^\mu = x^\mu x_\mu \tag{1.10}$$

Für die letzten beiden Terme wurde die 'Einstein-Konvention' benutzt: über gleiche Indizes wird summiert:

$$x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu \tag{1.11}$$

Man nennt

$$x_\mu = \begin{cases} x^0 & \mu = 0 \\ -x^\mu & \mu = 1, 2, 3 \end{cases}$$

den 'kovarianten' und x^μ den 'kontravarianten' Vektor. Beide sind durch den 'metrischen Tensor'

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu}) \tag{1.12}$$

über die Beziehungen

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu; \qquad x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \tag{1.13}$$

verknüpft.

Die Masse läßt sich so durch das Skalarprodukt des Viererimpulses ausdrücken:

$$m^2 = p^2 = p_\mu p^\mu = p_0^2 - \vec{p}^{\,2} = E^2 - \vec{p}^{\,2} \tag{1.14}$$

1.2.4 Lorentz-Transformationen

Transformationen zwischen Inertialsystemen nennt man Lorentz-Transformationen:

$$p'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, p^{\nu} \quad \text{oder} \quad p' = \Lambda\, p \tag{1.15}$$

Eigentliche Lorentz-Transformationen lassen sich als kontinuierliche Aneinanderreihung von infinitesimalen Transformationen (mit $\det\Lambda = 1$) darstellen. Uneigentliche Lorentz-Transformationen sind zum Beispiel Raum- oder Zeitspiegelungen, die in der Teilchenphysik eine wichtige Rolle spielen (Invarianzen der Naturgesetze gegenüber Raumspiegelung und Zeitumkehr). Hier betrachten wir zunächst nur **eigentliche Lorentz-Transformationen**, die entweder räumliche Drehungen oder 'Boosts' sein können.

Ähnlich den Orthogonalitäts- oder Unitaritätsbedingungen für orthogonale beziehungsweise unitäre Matrizen ergibt sich aus der Forderung der Invarianz der Skalarprodukte gegenüber Lorentz-Transformationen:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\, \Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\, g_{\mu\nu} \;=\; g_{\rho\sigma} \tag{1.16}$$

Das folgt aus der Invarianz der Skalarprodukte:

$$x^2 = x^{\rho} x_{\rho} = g_{\rho\sigma} x^{\rho} x^{\sigma} = x'^2 = x'^{\mu} x'_{\mu} = g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} = g_{\mu\nu}\, \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\, \Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\, x^{\rho} x^{\sigma} \tag{1.17}$$

a) Räumliche Drehung: In diesem Fall wirkt die Matrix Λ nur auf die Raumkomponenten, zum Beispiel bei einer Drehung um die z-Achse:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

Die Umkehrtransformation Λ^{-1} ergibt sich durch Ersetzen von θ durch $-\theta$.

b) Lorentz-Boost: Ein Lorentz-Boost ist eine Bewegung in eine Richtung mit der Geschwindigkeit v. Dazu definiert man:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{|\vec{v}|}{c} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{1.19}$$

Mit $c = 1$ ist $\beta = v$ und es gilt:

$$\beta = \frac{|\vec{p}|}{E} \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{E}{m}. \tag{1.20}$$

Ein Lorentz-Boost transformiert immer Raum- und Zeitkomponenten gleichzeitig. Zum Beispiel lautet ein Boost mit der Geschwindigkeit β in z-Richtung:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & o & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

Man sieht, daß $\beta = 0$ ($\Rightarrow \gamma = 1$) die Einheitsmatrix ergibt. Auf den Vektor $p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}$ angewandt:

$$\begin{aligned} E' &= \gamma E - \gamma\beta p_z \\ p'_x &= p_x \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= -\gamma\beta E + \gamma p_z \end{aligned}$$

Die Umkehrtransformation Λ^{-1} ergibt sich durch Ersetzen von β durch $-\beta$.

Die Matrix Λ kann sowohl eine aktive (Teilchen wird transformiert) als auch eine passive (KO-System wird transformiert) Transformation darstellen. Den Unterschied kann man sich gut mit dem Fall $\vec{p} = 0$, für den sich $p'_z < 0$ ergibt, klarmachen (Abb. 1.1): Λ ist eine

passive Transformation: Geschwindigkeit $+\beta$ in z-Richtung;
aktive Transformation: Geschwindigkeit $-\beta$ in z-Richtung.

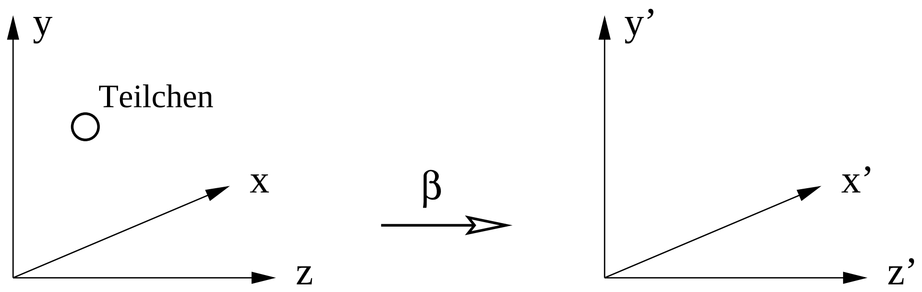


Abbildung 1.1: Der Boost des Koordinatensystems mit der Geschwindigkeit $+\beta$ in z-Richtung ist äquivalent einem Boost des Teilchens in die entgegengesetzte Richtung.

Der allgemeine Fall einer eigentlichen Lorentz-Transformation ist eine Kombination aus Drehung und Boost:

$$\Lambda = \Lambda(\vec{\theta}, \vec{\beta}) \tag{1.22}$$

1.2.5 Poincaré-Transformationen

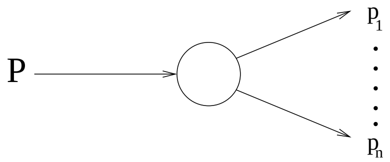
Verbindet man eine eigentliche Lorentz-Transformation Λ mit einer räumlichen und zeitlichen Translation a (a ist ein Vierervektor), so erhält man eine Poincaré-Transformation (Λ, a):

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu + a^\mu \quad \text{oder} \quad x' = \Lambda\, x + a \tag{1.23}$$

Die Poincaré-Transformation spielt eine wichtige Rolle für die Klassifikation von Teilchenzuständen, von denen ein bestimmtes Transformationsverhalten bei Poincaré-Transformationen gefordert wird.

1.2.6 Anwendungen

a) Zerfall eines Teilchens: Abbildung 1.2 zeigt eine kompakte Darstellung der Impuls- und Energieerhaltung für den Zerfall eines Teilchens.



$$P = \sum_i p_i = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i E_i \\ \sum_i \vec{p}_i \end{pmatrix}$$

Abbildung 1.2: Energie-Impuls-Erhaltung bei einem Teilchenzerfall

b) Schwerpunktsenergie: Wir betrachten zwei Teilchen 1 und 2, die aneinander streuen und in zwei Teilchen 3 und 4 übergehen (Abb. 1.3). Energie-Impuls-Erhaltung fordert:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \tag{1.24}$$

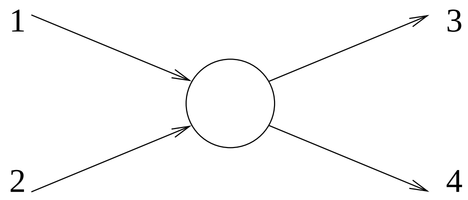


Abbildung 1.3: Schematische Darstellung eines Streuprozesses

Daraus lassen sich die Invarianten s, t, u (Mandelstam-Variable) bilden:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \tag{1.25}$$
$$t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \tag{1.26}$$
$$u = (p_1 - p_4)^2 = (p_3 - p_2)^2 \tag{1.27}$$

Die Invariante s ist das Quadrat der Schwerpunktsenergie, die Invarianten t und u sind Quadrate von Viererimpulsüberträgen. Im Schwerpunktsystem (CMS) gilt:

$$s = \begin{pmatrix} E_1 + E_2 \\ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} E_1 + E_2 \\ \vec{0} \end{pmatrix}^2 = E_{cms}^2 = M^2 \tag{1.28}$$

Dabei bezeichnet man M als die 'invariante Masse' des Systems; aus den Energien von 1 und 2 kann sich ein Zustand der Masse M bilden, der dann in 3 und 4 zerfällt. Nur zwei der Mandelstam-Variablen sind unabhängig. Es gilt die Beziehung:

$$s + t + u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2 \tag{1.29}$$

c) Transformation zwischen Schwerpunkt- und Laborsystem:
Theoretische Rechnungen werden in der Regel im Schwerpunktsystem gemacht, gemessen wird im Labor. Bei 'fixed target' Experimenten werden Teilchenstrahlen auf ruhende 'Targets' geschossen (Abb. 1.4). Die Berechnung wird in den Übungen durchgeführt.

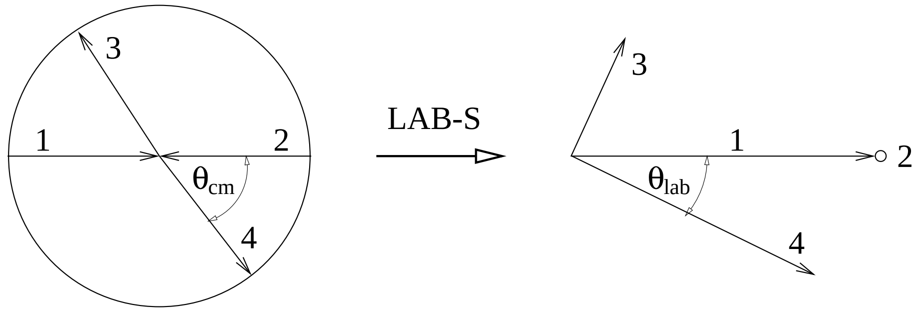


Abbildung 1.4: Transformation von dem Schwerpunktsystem einer Zweikörperreaktion in ein dazu bewegtes System.

1.3 Quantenmechanische Beschreibung von Teilchen

Quantenmechanisch wird ein Teilchen als ein Zustand beschrieben, der eindeutig durch einen Satz von Quantenzahlen $\alpha = (\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3,\, \ldots)$ festgelegt ist:

$$\psi = |\alpha > \tag{1.30}$$

Zum Beispiel könnte man einen Zustand durch Masse, Impuls und Spin festlegen:

$$\psi = |m, \vec{p}, s > \tag{1.31}$$

Bemerkung für diejenigen, die die Darstellungstheorie kennen: Diese Zustände sind Darstellungen der Poincaré-Gruppe.

Die Quantenzahlen sind Eigenwerte von Operatoren $\mathbb{A}$, die auf den Zustand ψ angewendet werden, zum Beispiel:

$$\mathbb{A}_i|\alpha >= \alpha_i|\alpha > \tag{1.32}$$

Zwei Quantenzahlen $\alpha_i,\ \alpha_j$ sind nur dann gleichzeitig meßbar, wenn die entsprechenden Operatoren 'kommutieren':

$$[\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j] \;=\; \mathbb{A}_i\mathbb{A}_j - \mathbb{A}_j\mathbb{A}_i \;=\; 0 \tag{1.33}$$

Zeit- und Ortskoordinaten oder Energie und Impuls können als (kontinuierliche) Quantenzahlen aufgefaßt werden. Zeit und Energie oder Ort und Impuls können nicht gleichzeitig genau gemessen werden, die entsprechenden Operatoren vertauschen nicht. Diese Aussage ist in der Unschärferelation ausgedrückt.

Wellenfunktionen von Teilchen: Die Orts- und Zeitabhängigkeit eines Teilchenzustandes $\psi(\vec{x}, t, \alpha')$ wird durch Wellenfunktionen gegeben, die Lösungen von Differentialgleichungen sind. Zum Beispiel beschreiben die Lösungen der Schrödinger-Gleichung (ohne Potentialterm) ein freies Teilchen mit Spin s=0:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi \qquad \text{oder } (\hbar = 1) \qquad -\frac{1}{2m}\Delta\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi \tag{1.34}$$

Dabei ist der Laplace-Operator:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \vec{\nabla}^{\,2} \quad \text{mit} \quad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

Lösungen, die ein freies Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Energie E darstellen, sind die ebenen Wellen:

$$\psi(\vec{x}, t) = \psi_0 e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} = \psi_0 e^{-ipx} \tag{1.36}$$

Einsetzen der Lösungen in die Schrödinger-Gleichung ergibt die nicht-relativistische Energie eines freien Teilchens:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{1.37}$$

Die Wellenfunktion ist eine komplexe Funktion, messen kann man aber nur reelle Größen ('Observable'). Das Betragsquadrat der Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ gibt die Wahrscheinlichkeitsdichte an, das Teilchen an dem Ort $\vec{x}$ zur Zeit t zu finden:

$$\rho(\vec{x}, t) = |\psi(\vec{x}, t)|^2 \tag{1.38}$$

Im allgemeinen sind Observable Erwartungswerte hermitescher Operatoren (hermitesche Operatoren haben reelle Eigenwerte):

$$< a >= \int dx\, dy\, dz\, \psi^* \, (\mathbb{A}\psi) = \int dx\, dy\, dz\, \psi \, (\mathbb{A}\psi)^* \tag{1.39}$$

Falls ψ ein reiner Zustand ist, ist $< a >$ ein Eigenwert von $\mathbb{A}$. Zum Beispiel ist der Erwartungswert des Abstandes r eines Elektrons vom Kern:

$$< r >= \int dx\, dy\, dz\, \psi^* \, (r\psi). \tag{1.40}$$

Mit den Energie- und Impulsoperatoren

$$\mathbb{E} = i\frac{\partial}{\partial t} \tag{1.41}$$

$$\vec{\mathbb{P}} = -i\vec{\nabla} \tag{1.42}$$

lautet die Schrödinger-Gleichung für ein freies Teilchen (1.34):

$$\frac{\vec{\mathbb{P}}^2}{2\,m}\psi = \mathbb{E}\psi \tag{1.43}$$

Die Energie- und Impulsoperatoren, angewendet auf Eigenfunktionen zu diesen Operatoren, haben als Eigenwerte E und $\vec{p}$:

$$\mathbb{E}\psi = i\frac{\partial}{\partial t}\psi = E\psi \tag{1.44}$$

$$\vec{\mathbb{P}}\psi = -i\vec{\nabla}\psi = \vec{p}\psi \tag{1.45}$$

Eigenfunktionen zu $\mathbb{E}$ und $\vec{\mathbb{P}}$ sind zum Beispiel die ebenen Wellen in (1.36).

Drehimpuls und Spin: Analog läßt sich auch der Drehimpulsoperator bilden. Da der Bahndrehimpuls eines Teilchens um den Ursprung $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ ist, ergibt sich für den Operator:

$$\vec{\mathbb{L}} = \vec{x} \times \vec{\mathbb{P}} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla}$$

Ein Zustand kann gleichzeitig Eigenzustand zu $\vec{\mathbb{L}}^2$ und einer Komponente $\mathbb{L}_z$ haben. Man sagt ein Zustand hat den Bahndrehimpuls l ($l = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$), wenn die Eigenwerte zu $\mathbb{L}_z$ die $2l+1$ Werte $m = l,\ l-1,\ \ldots,\ -(l-1),\ -l$ annehmen können (die Drehimpulskomponente ist dann jeweils $m \cdot \hbar$). Ein Drehimpulszustand ist durch die Quantenzahlen l, m gegeben.

Neben dem Bahndrehimpuls kann ein Teilchen auch einen Eigendrehimpuls, einen Spin haben. Im Gegensatz zum Bahndrehimpuls kann die Spinquantenzahl ganz- und halbzahlig sein:

$$s = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}, \ldots$$

Einen Spin $s = \frac{1}{2}$ haben zum Beispiel das Elektron und das Proton, das Photon hat einen Spin $s = 1$. Teilchen mit halbzahligem Spin heißen **Fermionen**, solche mit ganzzahligem Spin **Bosonen**. Für Fermionen gilt das Pauli-Prinzip: zwei Fermionen können nicht den gleichen Quantenzustand einnehmen, sondern müssen sich wenigstens in einer Quantenzahl unterscheiden (zum Beispiel ergibt sich die Schalenstruktur in der Atomhülle, weil die Elektronen nicht alle im Grundzustand sein können). Bosonen dagegen neigen dazu, sich in dem gleichen Zustand anzuhäufen (das wird zum Beispiel bei den Photonen in einem Laser ausgenutzt).

Drehimpulse (mit der Quantenzahl j) können bezüglich einer vorgegebenen Richtung (zum Beipiel die Richtung eines Magnetfeldes) $2j+1$ Einstellungen haben, die sich jeweils um eine Einheit unterscheiden.

1.4 Relativistische Wellengleichungen

Die Schrödinger-Gleichung ist offensichtlich nicht-relativistisch, das heißt nicht Lorentz-kovariant, weil sie linear in der Energie, aber quadratisch im Impuls ist (man nennt eine Formel kovariant bezüglich einer Transformation, wenn sie unter dieser Transformation ihre Form nicht ändert). Das Raum-Zeit-Verhalten von Teilchenzuständen sollte aber durch Wellenfunktionen beschrieben werden, die relativistisch kovarianten Differentialgleichungen genügen. Für die Betrachtungen des Raum-Zeit-Verhaltens sind die Teilchenzustände durch Masse, Impuls und Spin festgelegt (1.31):

$$\psi = |m, \vec{p}, s>$$

Wir betrachten im folgenden Wellengleichungen für Spin $s = 0$ und $s = 1/2$.

1.4.1 Klein-Gordon-Gleichung ($s = 0$)

Die Schrödinger-Gleichung (1.43) angewandt auf Eigenfunktionen zu Energie und Impuls ergibt die nicht-relativistische Energie freier Teilchen:

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \tag{1.46}$$

Wenn man die Beziehung

$$m^2 = E^2 - \vec{p}^{\,2}$$

erfüllen will, kann man formal folgende Operatoren definieren:

$$\mathbb{E}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \vec{\mathbb{P}}^{\,2} = -\vec{\nabla}^{\,2} = -\Delta, \quad \Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \partial^\mu \partial_\mu \quad (\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}), \tag{1.47}$$

wobei $\Box$ der d'Alembert-Operator ist. Es sei darauf hingewiesen, daß der kontravariante Vektor (∂^μ) die Ableitung nach dem kovarianten Vektor (x_μ) ist. Während also gilt

$$(x^\mu) = \begin{pmatrix} t \\ \vec{x} \end{pmatrix} \text{ und } (p^\mu) = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix},$$

ergibt sich für die partiellen Ableitungen

$$(\partial^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\vec{\nabla} \end{pmatrix}$$

Mit den Operatoren (1.47) erhält man formal eine relativistisch kovariante Schrödinger-Gleichung, die Klein-Gordon-Gleichung:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0 \tag{1.48}$$

oder:

$$(\Box + m^2)\phi(x) = 0$$

Wie bei der freien Schrödinger-Gleichung sind ebene Wellen Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung:

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-ipx} = \phi_0 e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})} \tag{1.49}$$

Die Größe ϕ_0 ist eine im allgemeinen komplexe Zahl, die die Normierung des Zustandes festlegt. Da $\phi(x)$ also eine skalare Funktion ist, beschreibt sie ein 'skalares Teilchen', also ein Teilchen mit Spin $s = 0$. Ein Beispiel für Teilchen mit Spin 0 sind die Pionen, die in drei Ladungszuständen ($\pi^\pm$, π^0) auftreten und in großer Zahl in hochenergetischen Reaktionen von Kernteilchen erzeugt werden.

Für die ebenen Wellen in (1.49) ergeben sich mit $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ jeweils zwei Lösungen mit

$$E = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad \text{und} \quad E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \tag{1.50}$$

Die Lösungen mit negativer Energie kann man nicht einfach wegdiskutieren, ohne sich Inkonsistenzen einzuhandeln. Sie werden benötigt, um ein vollständiges System von Eigenfunktionen zu erhalten, mit denen sich allgemeine Lösungen superponieren lassen. Für die Schrödinger-Gleichung ergibt sich dieses Problem nicht, weil die Ableitung nach der Zeit linear ist. Insbesondere wird dadurch auch das Vorzeichen des Terms iEt in der Lösung (1.36) festgelegt.

Ein weiteres Problem ergibt sich dadurch, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte für Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung negativ werden kann. Eine kovariante Formulierung der Erhaltung des Wahrscheinlichkeitsstromes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j} = 0 \tag{1.51}$$

erhält man, wenn man die Wahrscheinlichkeitsdichte ρ als 0-Komponente des Stromes definiert:

$$(j^\mu) = \begin{pmatrix} \rho \\ \vec{j} \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

Mit der kovarianten Formulierung von ρ und $\vec{j}$

$$\rho = i\left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\phi\right) \tag{1.53}$$

$$\vec{j} = -i\left(\phi^* \vec{\nabla}\phi - (\vec{\nabla}\phi^*)\phi\right) \tag{1.54}$$

oder kompakt

$$j^\mu = i\left(\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*)\phi\right) \tag{1.55}$$

liefert die Klein-Gordon-Gleichung die Stromerhaltung:

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \tag{1.56}$$

Für die ebenen Wellen mit positiver und negativer Energie ergibt sich der 'Viererstrom'

$$(j^\mu_\pm) = 2|\phi_0|^2 \begin{pmatrix} \pm\sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}} \\ \pm\vec{p} \end{pmatrix} = \pm 2|\phi_0|^2 (p^\mu) \tag{1.57}$$

Die Lösungen negativer Energie haben also eine negative Wahrscheinlichkeitsdichte. Dieses Ergebnis hatte zunächst dazu geführt, daß die Klein-Gordon-Gleichung als unphysikalisch verworfen wurde. Erst durch die Entwicklung der relativistischen Gleichung für Spin-1/2-Teilchen (Dirac-Gleichung, siehe unten), kam man nachträglich zu einem Verständnis der Lösungen mit negativen Energien: sie entsprechen **Antiteilchen**, deren 'ladungsartigen' Quantenzahlen entgegengesetztes Vorzeichen relativ zu den Teilchen haben. Was Teilchen und was Antiteilchen beziehungsweise was Materie und was Antimaterie genannt wird, wird dadurch festgelegt, daß uns fast ausschließlich Materie umgibt.

Zur Interpretation der Lösungen negativer Energie: Wir betrachten die ebenen Wellen (1.49)

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})},$$

die sich in Raum und Zeit ausbreitet. Wir können die positiven und negativen Energien wie folgt interpretieren:

$E > 0$	Welle breitet sich vorwärts in der Zeit aus
$E < 0$	Welle breitet sich rückwärts in der Zeit aus

Abbildung 1.5a zeigt als Beispiel ein positiv geladenes Pion, π^+, mit positiver Energie, das an diskreten Raum-Zeit-Punkten an Potentialen V, V' gestreut wird. Im Diagramm b) ist die Energie des ersten Pions $E_1 > 0$ und des zweiten Pions $E_2 < 0$. Die Interpretation ist:

V	absorbiert	die Energie E_1 und Ladung +1
V	emittiert	die Energie E_2 und Ladung +1