

3.3 Neutrinos

3.3.1 Überblick

Seit die Existenz der Neutrinos von Pauli postuliert worden war, um die Kinematik im β -Zerfall richtig beschreiben zu können, ist viel an und mit Neutrinos geforscht worden – häufig mit spektakulären Ergebnissen. Dazu gehört insbesondere die Entdeckung der Neutrino-Flavour-Oszillationen in den Flüssen von solaren und atmosphärischen Neutrinos³. Die genauen Parameter der Oszillationen sollen nun in verschiedenen Experimenten mit Neutrinos, die aus dem Weltall, von Beschleunigern oder Reaktoren kommen, genau vermessen werden. Die Eigenschaften der Neutrinos sind auch für die Kosmologie und die Entwicklung des Universums wichtig: so könnte das Rätsel der Materie-Antimaterie-Asymmetrie eine Erklärung finden, wenn das Neutrino sein eigenes Antiteilchen ist (Majorana-Neutrino). Wenn Neutrinos nicht Dirac-Teilchen sondern Majorana-Teilchen sind, kann es einen neutrinolosen Doppel- β -Zerfall geben.

Flavour-Mischungen durch Übergänge zwischen den Lepton-Dubletts (l^-, ν_l) verschiedener Familien ($l = e, \mu, \tau$) sind nur möglich, wenn die Neutrinos eine Masse haben. Tatsächlich gibt es, trotz intensiver experimenteller Bemühungen, bisher keine direkte Messung einer von Null verschiedenen Masse wenigstens eines der Neutrinos. Die aktuellen Grenzen sind [14]:

$$m(\nu_e) < 3 \text{ eV}, \quad m(\nu_\mu) < 170 \text{ keV}, \quad m(\nu_\tau) < 18.2 \text{ MeV}. \quad (3.58)$$

Trotzdem sind wir inzwischen sicher, dass die Neutrinos Massen haben (allerdings weit unterhalb der obigen Grenzen), weil die Oszillationen zwischen Neutrinos verschiedener Leptonflavours beobachtet wurden (die obigen Grenzen gelten für die effektiven Massen der Leptonflavour-Eigenzustände, die Überlagerungen der Massen der Masseneigenzustände sind, siehe Abschnitt 3.3.4).

Im “Licht von Neutrinos” ist erstmalig ein astronomisches Objekt, nämlich die Sonne, mit einer nicht-elektromagnetischen Strahlung beobachtet worden (Kamiokande II, 1989⁴). Bei dem Ausbruch der Supernova Sn1987A im Jahre 1987 wurden erstmals Neutrinos von einer Supernova beobachtet. Mit diesen Beobachtungen relativ niederenergetischer Neutrinos gewinnt man Informationen über das Innenleben von Sternen (elektromagnetische Signale brauchen einige 100000 Jahre, um aus dem Inneren der Sonnen an die Oberfläche zu kommen) und deren Entwicklung.

Die relativ ungestörte Ausbreitung über kosmologische Distanzen, macht hochenergetische Neutrinos zu interessanten Botenteilchen für astronomische Prozesse und Ereignisse, die zu der Erzeugung der riesigen Energien führen, die man in der geladenen und elektromagnetischen Komponente der kosmischen Strahlung beobachtet. Dabei ist die geringe Wechselwirkungswahrscheinlichkeit der Neutrinos einerseits hilfreich für ungestörte Beobachtungen, andererseits erfordert der Nachweis sehr große Detektorvolumina. Bisher sind keine hochenergetischen (oberhalb der TeV-Skala) Neutrinos von astronomischen Punktquellen beobachtet worden. Hier

³Sehr aktuelle Information über die Forschung an und mit Neutrinos findet sich unter <http://neutrinooscillation.org/>.

⁴K. S. Hirata et al. (KAMIOKANDE-II Collaboration), “Observation Of B-8 Solar Neutrinos in the Kamiokande-II Detector,” Phys. Rev. Lett. 63, 16 (1989).

wird ein Durchbruch mit der nächsten Generation von km³-großen Detektoren in Eis und Wasser erwartet.

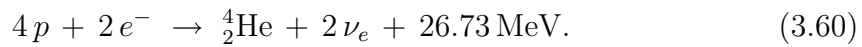
3.3.2 Solare Neutrinos

Sonnenenergie

Die Dichte, Druck und Temperatur im Inneren der Sonne,

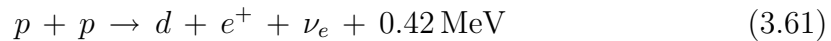
$$\rho = 10^5 \text{ kg/m}^3, \quad p = 2 \cdot 10^{15} \text{ Pa}, \quad T = 15.5 \cdot 10^6 \text{ K}, \quad (3.59)$$

erlauben die Kernfusion, die im wesentlichen über zwei Reaktionszyklen, den pp-Zyklus und den CNO-Zyklus, verläuft. In jedem Fall findet eine Verschmelzung von Wasserstoff zu Helium statt ('Wasserstoffbrennen'). Die Bilanzgleichung lautet:



Die Neutrinos verlassen die Sonne mit einer mittleren Energie von 0.26 MeV. In dem Prozess werden zusätzlich Gammaquanten erzeugt, die lokal absorbiert werden.

Der pp-Zyklus: Die Sonne und entsprechende Sterne bestehen hauptsächlich aus Protonen und Elektronen, die unter den herrschenden Druck- und Temperaturbedingungen ein Plasma bilden. Die Protonen können zu Deuterium entsprechend der folgenden Reaktion verschmelzen:



Das ist ein Prozess der schwachen Wechselwirkung mit einem entsprechend kleinen Wirkungsquerschnitt: Jedes Proton reagiert im Mittel nach etwa 10^{10} Jahren. Damit wird die Langzeitstabilität der Sonne garantiert. Alternativ kann Deuterium mit einem kleinen Anteil (0.23%) über den sogenannten pep-Prozess erzeugt werden:



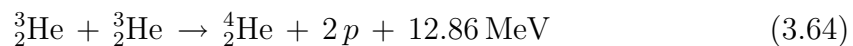
Das ist ein Elektroneneinfang-Prozess (EC), der im Gegensatz zu dem β -Zerfall in (3.61) monoenergetische Neutrinos liefert (siehe Abb. 3.22).

Im nächsten Schritt wird das Heliumisotop ${}^3\text{He}$ gebildet:

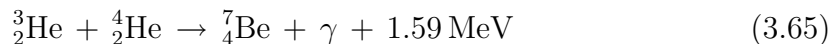


Jetzt gibt es drei unterschiedliche Wege (pp-I bis pp-III), die jeweils am Ende zu ${}^4_2\text{He}$ führen.

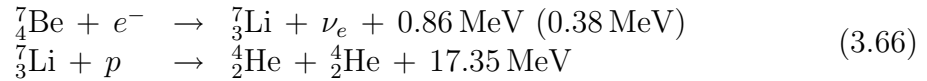
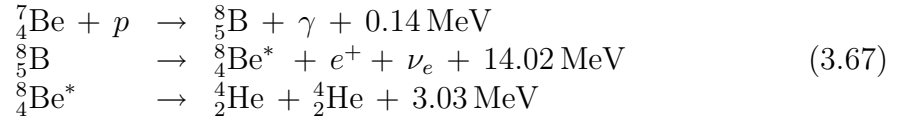
pp-I:



${}^7\text{Be}$ -Produktion: Die Ketten pp-II und pp-III beginnen beide bei der Produktion von ${}^7\text{Be}$:

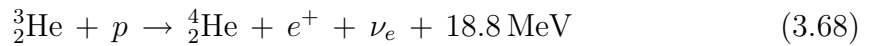


Dann teilen sich die Wege: ${}^7\text{Be}$ kann mit einem Elektron oder einem Proton reagieren.

pp-II:**pp-III:**

Der angeregte ${}^8\text{Be}$ -Kern zerfällt spontan in die beiden Heliumkerne.

Ausserdem gibt es noch einen sehr kleinen Beitrag von dem "hep-Prozess":



Zusätzlich trägt der CNO-Zyklus noch etwa 3% zur Energieerzeugung bei (siehe Kapitel 4).

Nachweis der Sonnenneutrinos

In den verschiedenen Fusionsreaktionen werden Neutrinos produziert, die zum Teil monoenergetisch sind (wenn sie von einem EC Prozess stammen) oder ein kontinuierliches Spektrum bis etwa 10 MeV haben (Abb. 3.22).

Trotz des sehr kleinen Wirkungsquerschnittes dieser niederenergetischen Neutrinos werden Solarneutrinos in Detektoren mit großer Targetmasse nachgewiesen. Zur Abschirmung des Untergrundes von der kosmischen Strahlung sind diese Detektoren in unterirdischen Kavitäten (Bergwerke, Tunnel) untergebracht.

Der Neutrinofluß von der Sonne ist von verschiedenen Experimenten in verschiedenen Energiebereichen etwa um einen Faktor 2 kleiner als die theoretischen Erwartungen gemessen worden. Zuerst wurde dieses Defizit an Solarneutrinos in dem Experiment von R. Davis beobachtet (Abb. 3.23). Das Experiment läuft seit 1968 in der Homestake Mine in South Dakota mit 615 t Perchloroethylen (C_2Cl_4). Die Nachweisreaktion



hat eine Schwelle für Neutrinoenergien von 814 keV. Das ${}^{37}\text{Ar}$ ist in der Lösung flüchtig und wird jeden Monat extrahiert. Der Nachweis erfolgt über den radioaktiven Zerfall



Die Ergebnisse werden häufig in SNU (solar neutrino units) angegeben:

$$1 \text{ SNU} = 10^{-36} \text{ Einfänge pro Targetatom und Sekunde}$$

Gemessen werden etwa 15 Atome pro Monat! Das Ergebnis des Homestake-Experimentes ist bisher $2.56 \pm 0.22 \text{ SNU}$ bei erwarteten $7.7 \pm 1.2 \text{ SNU}$.

Mit dem Chlor-Experiment kann wegen der Energieschwelle von 814 keV der dominierende pp-Prozess mit ν -Energien $\leq 420 \text{ keV}$ nicht beobachtet werden. Inzwischen gibt es allerdings Ergebnisse von anderen Experimenten, die auch beim pp-Prozess das Neutrinodefizit beobachten. In den Experimenten Gallex und Sage wird für den Nachweis Gallium benutzt:



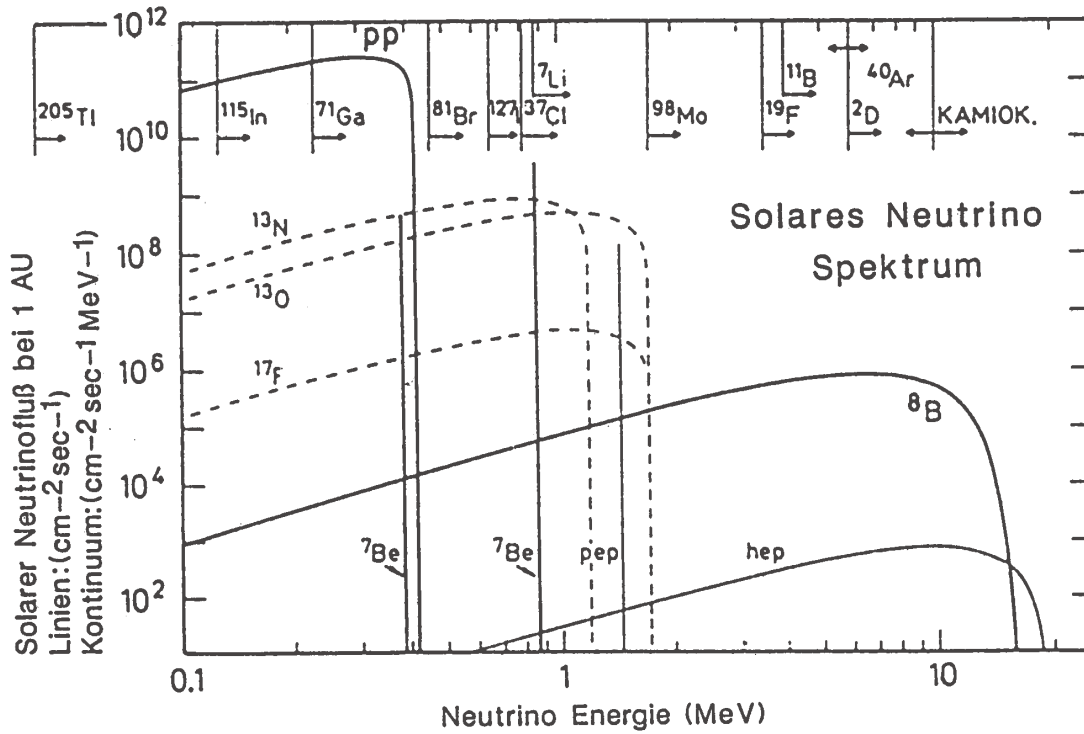


Abbildung 3.22: Das theoretisch berechnete solare Neutrinospektrum mit den Beiträgen der verschiedenen Reaktionen. Eingezeichnet sind auch die Schwellenenergien verschiedener Detektormaterialien. Der EC-Prozess des ${}^7\text{Be}$ in (3.66) führt zu zwei Linien entsprechend zwei möglichen Übergängen in ${}^7\text{Li}$.

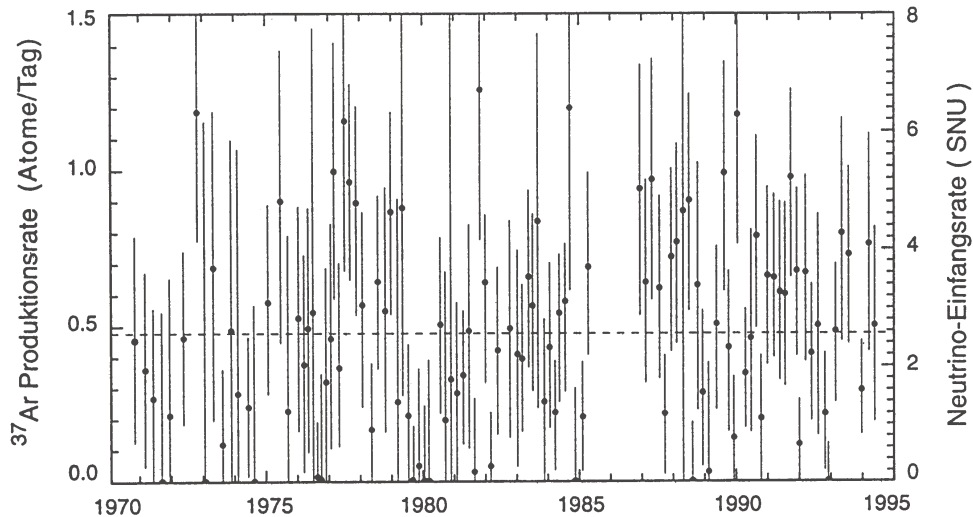


Abbildung 3.23: Mit dem Chlor-Experiment gemessener Neutrinofluss seit 1970. Nach den theoretischen Rechnungen werden 1.5 ± 0.6 Atome pro Tag erwartet.

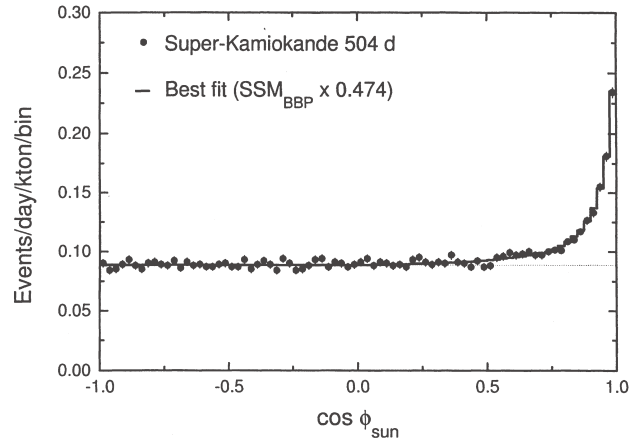


Abbildung 3.24: Neutrinoraten als Funktion der Einfallrichtung zur Sonne gemessen von Super-Kamiokande; $\cos \phi_{sun} = 1$ entspricht der Sonnenrichtung. Nach Subtraktion eines konstanten Untergrundes ist die Form der gemessenen Verteilung in sehr guter Übereinstimmung mit dem Standard-Sonnenmodell (SSM). Die theoretische Kurve muß allerdings um einen Faktor 0.474 herunterskaliert werden.

Die Reaktion hat eine Schwelle für Neutrinoenergien von 233 keV. Mit einer Halbwertszeit von 11.43 Tagen geht Germanium durch Elektroneinfang wieder in Gallium über:



Dieser Zerfall wird über Auger-Elektronen nachgewiesen (Auger-Elektronen werden beim Auffüllen des freien Elektronenplatzes emittiert).

Bei höheren Neutrinoenergien, oberhalb von einigen MeV, können Neutrinos direkt (in ‘Echtzeit’) über ihre Wechselwirkung mit den Elektronen nachgewiesen werden:



Wenn das Elektron genügend Rückstoß bekommen hat, kann es nachgewiesen werden, zum Beispiel kann es in einem Wassertank einen Cherenkov-Kegel erzeugen, dessen Richtung annähernd der Neutrinorichtung entspricht. Das Experiment Super-Kamiokande in Japan hat in einem Tank mit etwa 50000 to Wasser Sonnenneutrinos gemessen. Die gemessenen Winkel relativ zur Richtung der Sonne in Abb. 3.24 zeigen eine Überhöhung in Sonnenrichtung. Super-Kamiokande und der Vorläufer Kamiokande haben auch für energetische Sonnenneutrinos ein Defizit relativ zu der theoretischen Erwartung festgestellt.

In Tabelle 3.4 ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse von Experimenten mit verschiedenen Energieschwellen gezeigt (aus T. Kirsten: ‘Solar neutrino experiments: results and implications’, Rev. Mod. Phys., 71 (1999) 1213). Eine aktuelle Zusammenfassung findet man auf der Web-Seite des PDG [14].

In die theoretischen Berechnungen gehen Temperatur, Dichte und Druck im Inneren der Sonne sehr sensitiv ein. Man glaubt aber diese Parameter sehr gut kontrollieren zu können (unter anderem durch ‘helio-seismische’ Messungen). Für einen gegebenen Prozess zur Energieerzeugung, weiß man, wieviel Energie pro erzeugtem

Tabelle 3.4: Resultate von Sonnenneutrino-Experimenten verglichen mit den theoretischen Erwartungen des Standard-Sonnenmodells. Die Vorhersagen und Meßergebnisse sind für die radio-chemischen Experimente (Homestake, Gallex, Sage) in SNU und für (Super)-Kamiokande in $10^6 \nu(^8\text{B})\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ angegeben.

	Homestake	Kamiokande	Super-Kamiokande	Gallex	Sage
Schwelle [MeV]	0.814	7.5	7.0	0.233	0.233
Laufzeit	1970 - 1994	1987 - 1995	1996 - 1998	1991 - 1997	1990 - 1997
Vorhersage	$7.7^{+1.2}_{-1.0}\text{U}$	$5.15^{+0.98}_{-0.72}$	$5.15^{+0.98}_{-0.72}$	129^{+8}_{-6}	129^{+8}_{-6}
Experiment	2.56 ± 0.22	2.82 ± 0.38	2.42 ± 0.08	77.5 ± 8	66.6 ± 8
S_{th}/S_{exp}	3.0	1.8	2.1	1.7	1.9

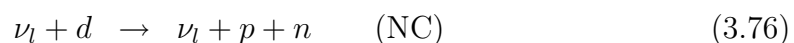
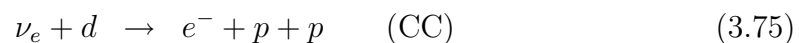
Neutrino zusätzlich erzeugt wird. Bei dem dominierenden pp-Prozess ist es zum Beispiel etwa 13 MeV pro Neutrino. Im Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Abstrahlung der Sonnenenergie läßt sich aus der Strahlungsleistung pro Fläche auf der Erde (Solarkonstante $S = 8.5 \cdot 10^{11} \text{ MeV cm}^{-2}\text{s}^{-1}$) der Neutrinofluß bestimmen:

$$\Phi_\nu = S / \langle E_\nu \rangle \approx 6.5 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1} \quad (3.74)$$

Neutrinooszillationen: Eine Erklärung für das Neutrinodefizit ist möglich, wenn Neutrinos eine Masse haben. Dann kann es Oszillationen zwischen den verschiedenen Neutrinoarten geben (siehe dazu die Diskussion in Abschnitt 3.3.4). In diesem Fall könnten die Elektronneutrinos aus den Fusionsprozessen in Myon- oder Tau-Neutrinos übergehen, auf die die Nachweisreaktionen nicht sensitiv sind. Die $(\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu, \nu_\tau)$ -Oszillation könnte auf der Erde gerade ein Minimum für ν_e ergeben.

Gesamtfluß aller Neutrino-Flavours von der Sonne: Man weiss also, dass Elektronneutrinos verschwinden (“disappearance” experiment). Um die Oszillationshypothese zu belegen, würde man eigentlich gern die daraus entstandenen μ - oder τ -Neutrinos nachweisen (“appearance” experiment). Der direkte Nachweis wäre am besten über eine CC-Reaktion mit dem Auftreten eines μ - oder τ -Leptons zu machen. Allerdings reicht die Energie von Sonnenneutrinos für die Erzeugung von μ - und τ -Leptonen nicht aus. Inzwischen gibt es aber von dem Subury Neutrino Observatory (SNO) experimentelle Ergebnisse, dass die Summe der Flüsse aller Neutrinoarten innerhalb der Messfehler dem erwarteten Fluß der Sonnenneutrinos entspricht. Die Summe der Flüsse ist durch NC-Reaktionen gemessen worden, an denen alle Neutrinoarten teilnehmen können.

Das SNO-Experiment in Kanada besteht aus 1000 to hochreinem schweren Wasser (D_2O) in einem kugelförmigen Acrylbehälter, der von einer H_2O -Abschirmung umgeben ist (Abb. 3.25). Der Detektor ist sensitiv auf ^8B -Sonnenneutrinos (hochenergetischer Teil des Spektrums, Abb. 3.22) über die Reaktionen:



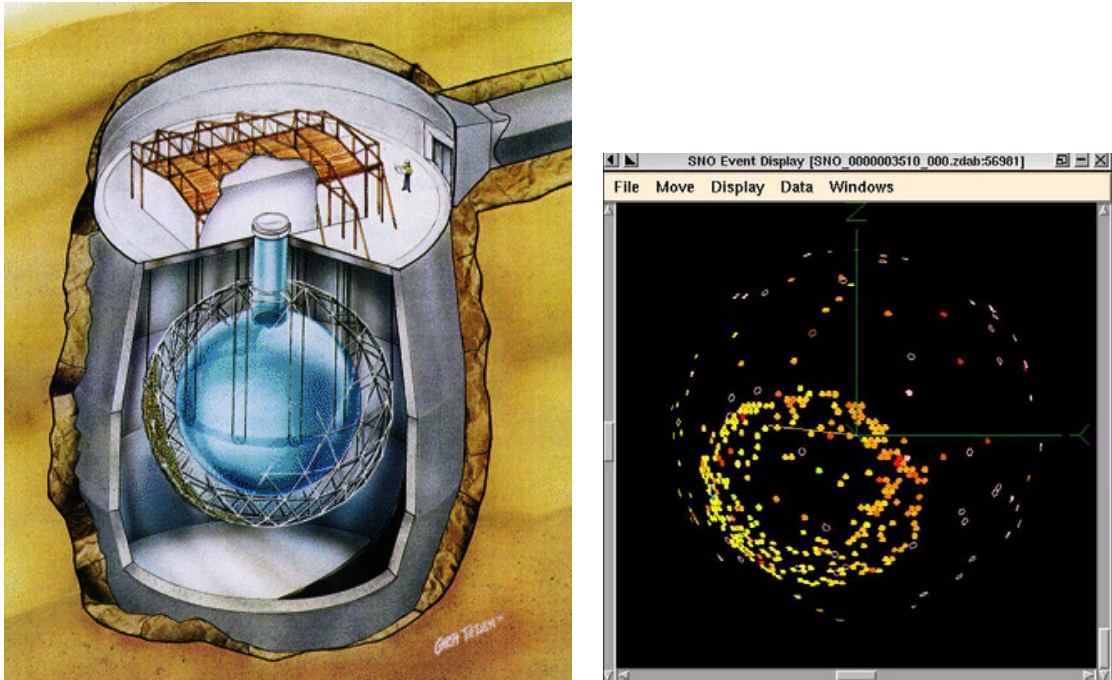


Abbildung 3.25: SNO-Experiment in der Sudbury mine; rechts Ereignis mit stoppendem Myon.

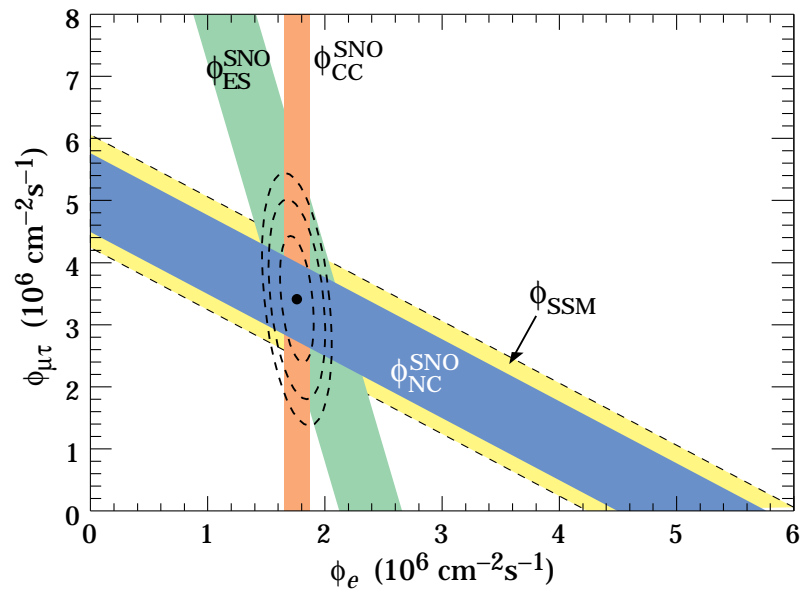


Abbildung 3.26: Messungen der solaren Neutrino Flüsse in unterschiedlichen Kombinationen, die alle den gleichen Schnittpunkt bei einer bestimmten $\phi(\nu_e)$ - $\phi(\nu_{\mu,\tau})$ -Kombination haben. Der Schnittpunkt liegt auch auf dem Band des Standard-Sonnenmodells, das eine feste Summe aller Neutrinos fordert.

$$\nu_l + e^- \rightarrow \nu_l + e^- \quad (\text{ES}) \quad (3.77)$$

Die erste Reaktion, Deuteronspaltung über den geladenen Strom (CC) kann nur durch Elektronneutrinos ausgelöst werden und misst deshalb den Fluss $\phi(\nu_e)$. Die zweite Reaktion, Deuteronspaltung über den neutralen Strom (NC), hat für alle Neutrino-Flavours den gleichen Wirkungsquerschnitt und misst deshalb $\phi(\nu_e) + \phi(\nu_{\mu,\tau})$ ($\phi(\nu_{\mu,\tau})$ steht für den Fluss der Neutrinos, die nicht ν_e sind). Die Messungen ergeben (Abb. 3.26):

$$\frac{\phi(\nu_e)}{\phi(\nu_e) + \phi(\nu_{\mu,\tau})} = 0.306 \pm 0.026 \pm 0.024 \quad (3.78)$$

Damit ist gezeigt, dass außer den Elektronneutrinos auch andere Neutrinos von der Sonne kommen. Tatsächlich ist auch der gemessene Fluss aller Neutrinos in sehr guter Übereinstimmung mit den theoretischen Erwartungen:

$$\phi_{tot}(\nu) = (5.21 \pm 0.27 \pm 0.38) \cdot 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad \text{exp.} \quad (3.79)$$

$$\phi_{tot}(\nu) = (5.21 + 1.01 - 0.81) \cdot 10^6 \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad \text{theo.} \quad (3.80)$$

3.3.3 Atmosphärische Neutrinos

Ein weiterer Hinweis auf Neutrino-Oszillationen kommt von Experimenten, die Neutrinos nachweisen, die in der Atmosphäre entstehen. Elektron- und Myonneutrinos können zum Beispiel in folgender Reaktionskette in der Atmosphäre erzeugt werden:

$$p + \text{Kern} \rightarrow \pi^- + X; \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu; \quad \mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \quad (3.81)$$

Bei dem entsprechenden Zerfall von π^+ -Mesonen werden die ladungskonjugierten Neutrinos erzeugt. Man beobachtet ein Defizit an μ -Neutrinos, die von unten kommen, also durch die Erde gehen (Abb. 3.27). Der entsprechende Fluss der Elektronneutrinos stimmt aber etwa mit den Erwartungen ohne Oszillationen überein. Es ist deshalb naheliegend anzunehmen, dass die μ -Neutrinos bevorzugt in τ -Neutrinos oszillieren (wenn es keine anderen Neutrinoarten gibt).

3.3.4 Formalismus der Neutrino-Oszillationen

Die Flavourquantenzahl der Neutrinos wird durch ihre Erzeugung mittels schwacher Wechselwirkung festgelegt: zum Beispiel treten im Neutronzerfall Elektronneutrinos, im π -Zerfall bevorzugt μ -Neutrinos und in hadronischen τ -Zerfällen τ -Neutrinos auf. Wir haben drei solche Flavour-Eigenzustände ν_α mit $\alpha = e, \mu, \tau$. Die Flavour-Eigenzustände ν_α sind Überlagerungen von Massen-Eigenzuständen ν_i mit festen Massen m_i :

$$\nu_\alpha = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* \nu_i \quad (3.82)$$

mit einer unitären Matrix entsprechend der CKM-Matrix für Quarkmischungen (die Konvention ist, dass für Teilchenfelder hier die Matrix U auftritt und für Zustände die Matrix U^* ; wir wollen das hier aber nicht unterscheiden).

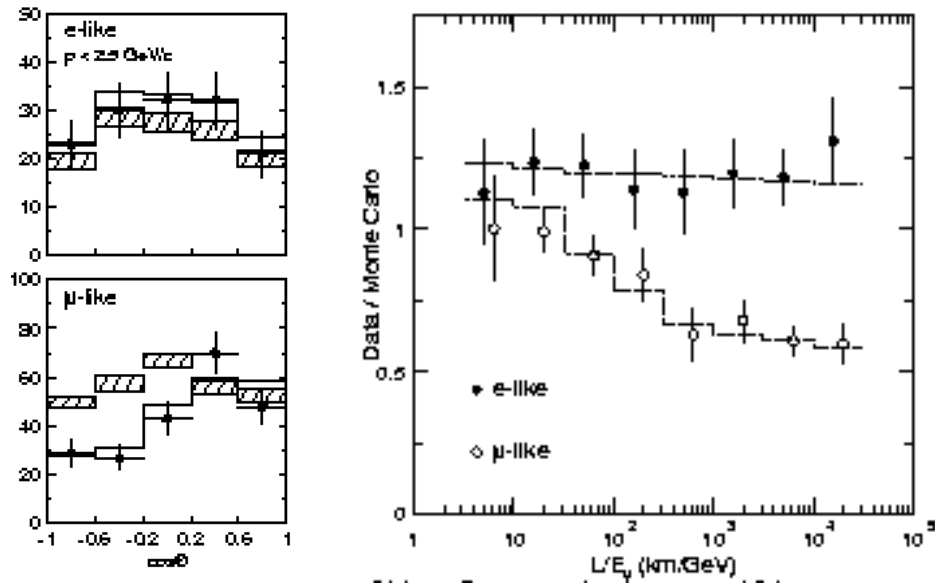


Abbildung 3.27: Messung des Flusses von atmosphärischen Elektron- und Myonneutrinos mit dem Super-Kamiokande-Detektor. Links: Die Verteilung des Zenithwinkels der gemessenen Elektron- und Myonneutrinos im Vergleich zu den Erwartungen ohne Oszillationen (Flächen) ($\cos \theta = +1$ ist oben, $\cos \theta = -1$ ist unten). Man sieht deutlich das Defizit für Myonneutrinos, die von unten kommen, also durch die Erde gehen und somit einen weiteren Weg haben. Rechts: Das Verhältnis der gemessenen zu den erwarteten Neutrinos als Funktion des Verhältnisses der Weglänge und der Neutrinoenergie. Die gestrichelten Linien sind die Vorhersage für Oszillationen $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ mit den Parametern $\Delta m^2 = 2.2 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2$ und $\sin^2 2\theta = 1$ (siehe auch Abb. 3.28).

Wir sind interessiert an der zeitlichen Entwicklung eines Zustandes, der durch den Produktionsprozess zur Zeit $t = 0$ festgelegt ist, also ein reiner Flavour-Eigenzustand ist. Ein Masseneigenzustand ν_i mit der Energie E_i , der in x-Richtung mit dem Impuls p_i propagiert, hat die zeitliche Entwicklung:

$$\nu_i(t) = e^{-i(E_i t - p_i x)} \nu_i(0) \quad (3.83)$$

Die Massen sind so klein, dass man für die Ausbreitung die Lichtgeschwindigkeit annehmen kann, das heißt $x/t = 1$ (mit $c = 1$):

$$\nu_i(x) = e^{-i(E_i - p_i)x} \nu_i(0) \quad (3.84)$$

Weiterhin läßt sich für $p_i \gg m_i$ die Energie entwickeln:

$$E_i = p_i + \frac{m_i^2}{2p_i} \quad (3.85)$$

Das eingesetzt in (3.84) ergibt:

$$\nu_i(x) = e^{-i\left(\frac{m_i^2}{2p_i}\right)x} \nu_i(0) \quad (3.86)$$

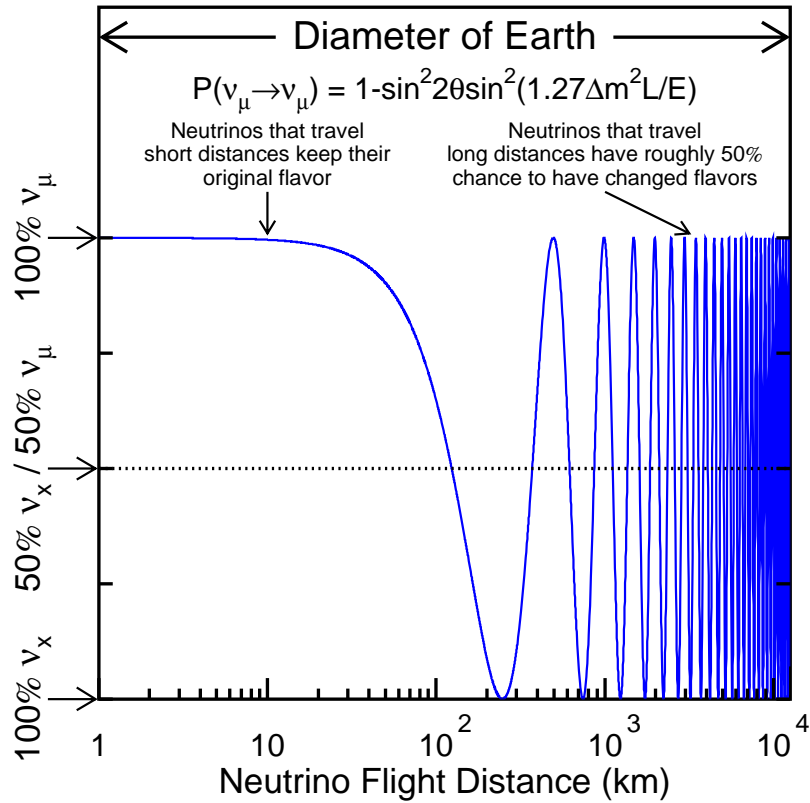


Abbildung 3.28: Oszillationen der atmosphärischen Myon-Neutrinos.

Die Massenzustände, die nach (3.82) zu einem Flavourzustand beitragen, bekommen also eine mit der Flugstrecke wachsende Phasendifferenz, da ja der Impuls p_i durch den Produktionsprozess festgelegt ist und somit für alle ν_i gleich ist. Man definiert gewöhnlich eine mittlere Energie E der Massenzustände und setzt in (3.86) ein:

$$p_i \approx E \quad (3.87)$$

Damit erhalten wir durch Einsetzen von (3.86) in (3.82) die zeitliche Entwicklung eines Flavour-Zustandes:

$$\nu_\alpha(x), = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* e^{-i(\frac{m_i^2}{2E})x} \nu_i(0) \quad (3.88)$$

Mit der Inversion von (3.82) können wir dann noch die Zustände ν_i eliminieren, was uns dann die zeitliche Entwicklung eines Flavour-Zustandes in andere Flavour-Zustände liefert:

$$\nu_\alpha(x), = \sum_{\beta=1}^3 U_{\alpha i}^* e^{-i(\frac{m_i^2}{2E})x} U_{\beta i} \nu_\beta \quad (3.89)$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für die Oszillation eines Anfangszustandes α in einen Zustand β nach der Flugstrecke x gegeben durch:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; x) = |\langle \nu_\beta(0) | \nu_\alpha(x) \rangle|^2 \quad (3.90)$$

Einsetzen von (3.89) ergibt:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; x) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \operatorname{Re}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E} x \quad (3.91)$$

$$+ 2 \sum_{i>j} \operatorname{Im}(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*) \sin \frac{\Delta m^2}{2E} x \quad (3.92)$$

Diesen Ausdruck wollen wir jetzt für den Fall bestimmen, dass nur zwei Neutrinoarten oszillieren. Das könnten im Fall der Sonnenneutrinos die Flavour-Zustände ν_e und ν_μ sein. Für die Mischung von zwei Zuständen ist die Matrix U reell und kann wegen der Orthogonalität durch einen einzigen Mischungswinkel θ_V parametrisiert werden (V steht für Vakuum; in Materie kann sich die Mischung ändern, siehe unten):

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_V & \sin \theta_V \\ -\sin \theta_V & \cos \theta_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

Die Wahrscheinlichkeit ein als Elektronneutrino erzeugtes Neutrino nach einer Flugstrecke x noch als Elektronneutrino zu finden ist:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; x) = |\langle \nu_e(x) | \nu_e(0) \rangle|^2 = 1 - \sin^2 2\theta_V \sin^2 \frac{\Delta m^2}{4E} x \quad (3.94)$$

Dabei ist $\Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$, wobei $m_2 > m_1$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit festgelegt werden kann. Üblicherweise führt man eine Oszillationslänge im Vakuum L_V ein, das ist die Länge zwischen zwei Maxima der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Elektronneutrinos:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; x) = 1 - \sin^2 2\theta_V \sin^2 \frac{\pi}{L_V} x \quad (3.95)$$

Für die Oszillationslänge ergibt sich (mit den richtigen Faktoren c und \hbar):

$$L_V = \frac{4\pi E \hbar}{\Delta m^2 c^3} = 2.48 \text{ m} \left(\frac{E}{\text{MeV}} \right) \left(\frac{\text{eV}^2}{\Delta m^2} \right) \quad (3.96)$$

Bei kleinen Massendifferenzen ergeben sich also große Oszillationslängen. Für Sonnenneutrinos mit Energien von etwa 0.2 bis 10 MeV und einem Erde-Sonne-Abstand von $1.5 \cdot 10^{11}$ m, ergeben sich Sensitivitäten auf Massendifferenzen von etwa 10^{-11} eV². Aus den Experimenten in Tabelle 3.4 ergeben sich als beste Lösung für Vakuumoszillationen etwa folgende Werte: $\Delta m^2 \approx 8 \cdot 10^{-11}$ eV² und $\sin^2(2\theta_V) \approx 0.75$. Diese Vakuumlösung ist allerdings nicht mehr die favorisierte Lösung (siehe Masseneffekte unten).

3.3.5 Ergebnisse für die 3-Flavour-Mischungsmatrix:

Eine häufig benutzte Darstellung der Mischungsmatrix U^* basiert auf den drei Mischungswinkeln θ_{12} , θ_{23} , θ_{13} , die wie Euler-Winkel definiert sind ($c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$):

$$U^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

Es sei hier nur am Rande bemerkt, dass für Majorana-Neutrinos eine vierte Matrix dazukommt, die diagonal ist und zwei weitere Phasen einführt. Gleichung (3.97) ergibt:

$$U^* = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

Wie im Falle der Quarkmischungen tritt hier auch nur eine freie Phase δ auf, die im allgemeinen zu CP -Verletzung führt, weil die Mischungsmatrix für Antineutrinos die komplex konjugierte Matrix der Neutrinos ist.

Die experimentellen Ergebnisse für die Mischungswinkel sind⁵:

$$\sin^2 \theta_{12} \approx 0.31, \quad \sin^2 \theta_{23} \approx 0.50, \quad \sin^2 \theta_{13} \approx 0 \quad (3.99)$$

das entspricht:

$$\theta_{12} \approx 33.8^\circ, \quad \theta_{23} \approx 45.0^\circ, \quad \theta_{13} \approx 0^\circ \quad (3.100)$$

Für die Massendifferenzen ergibt sich aus der Analyse der solaren Neutrinos eine Massendifferenz

$$\Delta m_{12}^2 = m_2^2 - m_1^2 \approx 7.9 \cdot 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (> 0, \text{ festgelegt}), \quad (3.101)$$

die klein ist gegenüber der mit atmosphärischen Neutrinos gemessenen Massendifferenz:

$$\Delta m_{(12)3}^2 = \left| m_3^2 - \frac{m_2^2 - m_1^2}{2} \right| \approx 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (3.102)$$

Es gilt $\Delta m_{13}^2 = m_3^2 - m_1^2 \approx \Delta m_{23}^2 = m_3^2 - m_2^2$, wobei das Vorzeichen bisher experimentell nicht bestimmt wurde. Beide Möglichkeiten werden in Betracht gezogen.

Dieser Satz von Mischungsparametern entspricht der so genannten ‘Large Mixing Angle’ (LMA) - Lösung mit Masseneffekten. Die Charakteristika sind:

- Zwei der Mischungswinkel sind groß, so dass eine Entwicklung um eine Diagonalform der Mischungsmatrix wie bei den Quarks (Wolfenstein-Parametrisierung) nicht möglich ist. Die Winkel sind nahe einer Mischung mit gleichen Anteilen zweier Massenzustände (für $\theta = 45^\circ$).
- Ein Winkel, θ_{13} ist sehr klein oder Null. Dieser Winkel soll in der nächsten Zeit besser bestimmt werden. Das Auftreten von CP -Verletzung durch die Phase δ setzt $\theta_{13} \neq 0$ voraus.
- Die Hierarchie von Massen, mit einer großen und einer kleinen Aufspaltung, führt dazu, dass die Messungen der solaren und atmosphärischen Neutrinos jeweils wie 2-Flavour-Systeme behandelt werden können.

MSW-Effekt: Unterschiedliche Wechselwirkungen der Flavoureigenzustände in Materie können die Oszillationen beeinflussen. Zum Beispiel kann im Fall der Sonnenneutrinos das Elektronneutrino an den Elektronen des Sonnenplasmas über W - und Z -Austausch (CC und NC) elastisch streuen, während das Myonneutrino nur über Z -Austausch streut. Das führt zu einer Modifizierung der Oszillationslänge während des Durchlaufens der Sonne (MSW-Effekt).

⁵G.L. Fogli et al., ‘Global analysis of three-flavor neutrino masses and mixings’, hep-ph/0506083.