Anhang B

Ergänzungen

B.1 Zustandsgleichungen

Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen Druck und Energiedichte für Materie und Strahlung für einige wichtige Spezialfälle näher betrachtet werden. Bei der Ableitung der allgemeinen Gasgleichung benutzt man:

$$p = \frac{1}{3} n \langle \pi \, v \rangle \tag{B.1}$$

Dabei ist p der Druck, der von Teilchen mit einer Dichte n, mittlerem Impuls π und Geschwindigkeit v auf die Wand eines Gefäßes ausgeübt wird.

Im **nicht-relativistischen Fall**, $v \ll c$, ist $\pi = m \, v$ (m bedeutet immer die Ruhemasse) und (B.1) wird:

$$p = \frac{1}{3} n \, m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} n \, m \, c^2 \left\langle \frac{v^2}{c^2} \right\rangle = \frac{1}{3} \rho_m \, c^2 \left\langle \frac{v^2}{c^2} \right\rangle , \tag{B.2}$$

wobei $\rho_m \, c^2$ die Energiedichte aufgrund der Ruhemassen ist, die im nicht-relativistischen Fall dominiert. In diesem Fall wird der Druck auch sehr klein:

$$p \ \rightarrow \ 0 \quad \text{für } v \ll c. \tag{B.3}$$

Im **relativistischen Fall**, $v \approx c$, geht man von den relativistischen Formeln für Impuls und Energie aus:

$$\pi = \gamma \, m \, v \qquad \text{und} \qquad E = \gamma \, m \, c^2 \tag{B.4}$$

Tabelle B.1: Zustandsgleichung, Energiedichte und Skalenparameter, der die Ausdehnung des Universums beschreibt, jeweils für die Dominanz einer Energieform in einer Entwicklungsphase des Universums.

Dominante Energieform	Zustandsgleichung	Energiedichte	Skalenparameter
Strahlung	$p = \frac{1}{3} \rho_s$	$\rho_s \sim R^{-4}$	$R \sim t^{1/2}$
Materie	$p = \frac{1}{3} \rho_m \, c^2 \langle \frac{v^2}{c^2} \rangle \stackrel{v \ll c}{\rightarrow} 0$	$\rho_m \sim R^{-3}$	$R \sim t^{2/3}$
Vakuum	$p = -\rho_v$	$\rho_v = const$	$R \sim \exp{(\alpha t)}$

Damit ergibt sich:

$$\lim_{v\to c} \pi \to E/c \tag{B.5}$$

Diese Gleichung entspricht natürlich dem Zusammenhang zwischen Energie und Impuls eines Photons:

$$\pi = \frac{h}{\lambda}; \quad E = h\,\nu = \frac{h\,c}{\lambda} = \pi\,c \tag{B.6}$$

Damit ergibt (B.1) im relativistischen Fall, $v \approx c$:

$$p = \frac{1}{3} n\,\langle \pi\, c\rangle = \frac{1}{3} n\,\langle E\rangle = \frac{1}{3}\rho_s \tag{B.7}$$

Quantenfluktuationen im Vakuum führen zu einer **Vakuumenergie** ρ_v, die negativen Druck ausübt:

$$p = -\rho_v\, c^2 \tag{B.8}$$

Der negative Druck lässt sich dadurch erklären, dass die Energie proportional dem Volumen zunimmt, weil mit wachsendem Phasenraum mehr Schwingungsmoden möglich werden (entspricht dem Casimir-Effekt).

In Tabelle B.1 ist zusammengestellt, wie sich das Universum jeweils entwickelt, wenn ein bestimmter Zustand dominiert.