

Kapitel 5

Beschleunigungsmechanismen

Das gemessene Spektrum der Kosmischen Strahlung (Abb. 3.4) erstreckt sich bis zu Energien von mehr als 10^{20} eV. Solche Energien können nicht mehr thermischen Ursprungs sein. Die Quellen für die hochenergetische Strahlung müssen deshalb kosmische Beschleuniger sein und/oder exotischere Phänomene, wie die Zerfälle bisher unbekannter Teilchen mit Massen, die größer als die bisher beobachteten CR-Energien sind.

Als Kandidaten für kosmische Teilchenbeschleuniger werden Phänomene diskutiert, bei denen ein besonders hoher Energieumsatz beobachtet wird:

- Schockwellen von Supernovae;
- Pulsare;
- Aktive Galaktische Kerne (AGN);
- Schwarze Löcher;
- Gammastrahlungsausbrüche (gamma ray bursts, GRB);
- ...

Mit dem Verständnis kosmischer Beschleuniger steht man noch ganz am Anfang. Die theoretische Basis ist die Magnetohydrodynamik heißer Plasmen und die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (zum Beispiel bei Schwarzen Löchern). Die im Allgemeinen sehr komplizierten Gleichungen versucht man, numerisch zu lösen. Häufig ergeben sich aber bisher nur Abschätzungen für die Größenordnungen der umgesetzten Energien und Plausibilitätsargumente für Beschleunigungsmechanismen.

5.1 Gesamtenergie der Kosmischen Strahlung

Um die Größenordnung der notwendigen Beschleunigungsleistungen zu sehen, vergleichen wir die Leistung, mit der die CR in der Milchstraße erzeugt werden muß, mit der Leistung von Supernovae-Explosionen. Die CR wird durch die galaktischen Magnetfelder ($O(\mu\text{G})$) in der Milchstraße gehalten (siehe den Paragraphen 'Das galaktische Magnetfeld' in Abschnitt 3.2.3). Mit folgenden Zahlenwerten läßt sich die

notwendige Beschleunigungsleistung für die galaktische kosmische Strahlung berechnen:

$$\begin{aligned}\rho_E^{CR} &\approx 0.5 \text{ MeV/m}^3 && \text{CR-Energiedichte in der Galaxis} \\ \tau_G^{CR} &\approx 10^7 \text{ Jahre} && \text{Verweilzeit der CR in der Galaxis} \\ V_G &\approx 10^{61} \text{ m}^3 && \text{Volumen der Galaxis } (r \approx 15 \text{ kpc}, h \approx 0.5 \text{ kpc})\end{aligned}$$

Daraus berechnet sich die notwendige Beschleunigungsleistung für die galaktische kosmische Strahlung:

$$L_{CR} = \frac{V_G \cdot \rho_E^{CR}}{\tau_G^{CR}} \approx 3 \cdot 10^{33} \text{ J/s} \quad (5.1)$$

Die Gesamtleistung von Supernova-Explosionen schätzen wir mit folgenden Zahlenwerten ab:

$$\begin{aligned}\tau_G^{SN} &\approx 30 - 50 \text{ Jahre} && \text{mittlere Zeit zwischen SN-Explosionen in der Milchstraße} \\ E^{SN} &\approx 3 \cdot 10^{46} \text{ J} && \text{Energie pro SN-Explosion}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Gesamtleistung der Supernova-Explosionen in der Milchstraße:

$$L_{SN} = \frac{E^{SN}}{\tau_G^{SN}} \approx 3 \cdot 10^{35} \text{ J/s} \quad (5.2)$$

Es ist durchaus denkbar, dass in Supernova-Explosionen Teilchen mit 1% Effizienz beschleunigt werden können und damit die Gesamtenergie der galaktischen CR erklärbar wäre. Es zeigt sich auch, dass das beobachtete Potenzgesetz im Energiespektrum zumindest für Energien bis zum Knie von Modellen für Beschleunigungsmechanismen in SN-Resten reproduziert wird (siehe Abschnitt 5.4).

5.2 Magnetfelder und Plasmen

Die Modelle für kosmische Beschleunigungsmechanismen benutzen in der Regel Magnetfelder, die in Plasmen eingeschlossen sind. Ohne hier in die Details der Magnetohydrodynamik einzugehen, werden wir im Folgenden einige für das Verständnis wichtige Prinzipien besprechen.

5.2.1 Magnetische Spiegel und Flaschen

Statisches homogenes Magnetfeld: In einem statischen homogenen Magnetfeld führt die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = z e(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.3)$$

zu einer Helix-Teilchenbahn mit konstanter Steigung und einem konstanten Radius (Gyroradius) in der Projektion senkrecht zu dem Magnetfeld (Abb. 5.1). Mit der lorentz-invarianten Definition des Impulses

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad (5.4)$$

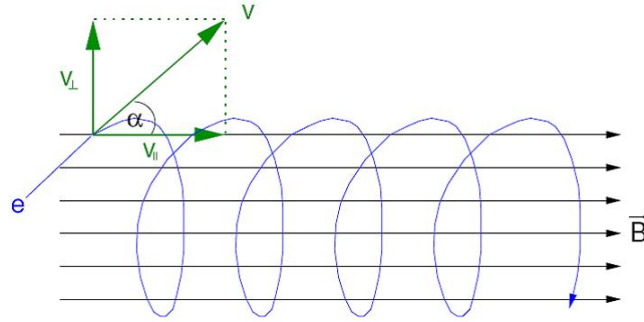


Abbildung 5.1: Teilchenbahn in einem homogenen Magnetfeld.

ergibt sich die lorentz-kovariante Form von (5.3):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{ze}{\gamma m} (\vec{p} \times \vec{B}) \quad (5.5)$$

Die Lösungen sind:

$$p_{\parallel} = \text{const} \quad (5.6)$$

$$p_T = r_G \omega_c \gamma m \quad (5.7)$$

mit der Zyklotronfrequenz

$$\omega_c = \frac{zeB}{\gamma m} \quad (5.8)$$

und dem Gyroradius

$$r_G = \frac{p_T}{zeB}. \quad (5.9)$$

Langsam veränderliches Magnetfeld: Es sollen jetzt Teilchenbewegungen in Magnetfeldern, die sich räumlich und/oder zeitlich langsam verändern, besprochen werden. ‘Langsam’ bedeutet hier:

$$\vec{B} \approx \text{const} \quad \text{über einen Umlauf,} \quad (5.10)$$

so dass sich quasi-periodische Bewegungen mit adiabatischen Änderungen ergeben. Im Weiteren verwenden wir den Formalismus der klassischen Mechanik:

Seien q_i , p_i kanonisch konjugierte Variable und q_i zyklisch (das heißt, die Hamilton-Funktion hängt nicht explizit von q_i ab, $\partial H / \partial q_i = 0$), dann ist das folgende Integral über einen geschlossenen Weg invariant gegenüber adiabatischen Veränderungen:

$$J_i = \oint p_i dq_i = \text{const} \quad (5.11)$$

Wir betrachten den Ortsvektor \vec{r}_T und den generalisierten Impuls \vec{P}_T in der Ebene senkrecht zu \vec{B} , mit

$$\vec{P}_T = \vec{p}_T + ze\vec{A} \quad (\vec{B} = \nabla \times \vec{A}). \quad (5.12)$$

Die Variablen $r = |\vec{r}_T|$, P_T sind kanonisch konjugiert und r ist zyklisch. Dann ist das folgende geschlossene Wegintegral invariant:

$$J = \oint \vec{P}_T d\vec{r}_T = \oint \vec{p}_T d\vec{r}_T + \underbrace{ze \oint \vec{A} d\vec{r}_T}_{\int \vec{B} d\vec{a}} \quad (5.13)$$

$$= 2\pi r \underbrace{p_T}_{r z e B} - z e B \pi r^2 = z e \pi r^2 B \quad (5.14)$$

$$= z e \phi_m \quad (5.15)$$

Daraus folgt, dass der magnetische Fluss ϕ_m durch eine in der Projektion senkrecht zum Magnetfeld geschlossene Teilchenbahn konstant ist:

$$\phi_m = \pi r^2 B = \text{const} \quad (5.16)$$

Mit (5.9) ergibt sich schließlich die wichtige Erhaltungsgröße:

$$\frac{\vec{p}_T}{B} = \text{const} \quad (5.17)$$

Anwendungen:

1. $|\vec{B}| = \text{const}$; Feldlinien gekrümmt: Teilchen spiralt um Feldlinie (Abb. 5.2), wodurch die Kurve einen konstanten Fluss, $\phi_m = \text{const}$ einschließt. Es sei an-

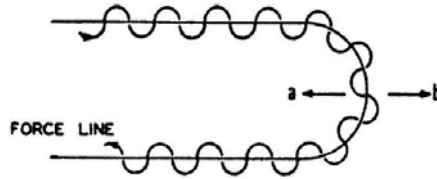


Abbildung 5.2: Darstellung einer Teilchenbahn, die einer gekrümmten B-Feldlinie folgt (Aus: E. Fermi, "On the Origin of the Cosmic Radiation", Physical Review 75 (1949) 1169).

gemerkt, dass zum Beispiel Elektronen durch Synchrotronstrahlung den Impuls transversal zu der Feldlinie verlieren, deshalb sehr bald genau entlang der Feldlinie laufen und dann die Krümmungsstrahlung, wie in Abschnitt 3.4.5 besprochen, abstrahlen.

2. Konvergierende Feldlinien, magnetische Flasche, magnetischer Spiegel: Aus dem Erhaltungssatz (5.17) leitet man für die magnetische Flasche in Abb. 5.3 ab: In der Mitte der (hier, oBdA, symmetrischen) Flasche ist das Magnetfeld minimal und damit auch p_T minimal und damit p_{\parallel} maximal. An den Enden ist das Feld und damit auch p_T maximal und damit p_{\parallel} minimal. Wenn bei maximalem Feld der Transversalimpuls größer als der (erhaltene) Gesamtimpuls werden würde, $p_{T \max} > p$, gibt es einen Umkehrpunkt mit $p_{T \max} = p$ und das Teilchen läuft zurück. Das Prinzip der magnetischen Spiegel oder Flaschen wird zum Einschluß von Plasmen in Kernfusionsanlagen angewendet. Es ist auch für die Oszillation von Ionen und Elektronen zwischen den magnetischen Polen der Erde im Van Allen-Gürtel verantwortlich.

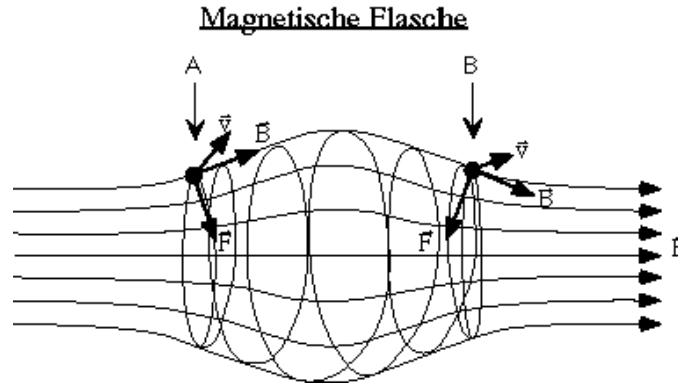


Abbildung 5.3: Magnetische Flasche.

5.2.2 Einschluß von Magnetfeldern in Plasmen

Zeitliche Änderungen eines Magnetfeldes in einem Plasma mit guter Leitfähigkeit σ werden stark durch die Gegenwirkung der induzierten Felder gehemmt. Wir wollen uns das an einem einfachen Beispiel, das aber das Wesentliche enthält, klarmachen.

Wir betrachten ein homogenes Magnetfeld \vec{B} in einem langen Plasmaschlauch mit Radius $r = R$, dessen zeitliche Änderung $\dot{\vec{B}}$ parallel zu \vec{B} verlaufen soll. Auf einem kreisförmigen Weg mit Radius r wird ein elektrisches Feld induziert:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int (\vec{B} d\vec{a}) \implies |\vec{E}| 2\pi r = \pi r^2 |\dot{\vec{B}}| \implies |\vec{E}| = \frac{1}{2} r |\dot{\vec{B}}| \quad (5.18)$$

Das Feld führt zu einem Ringstrom,

$$|\vec{j}| = \sigma |\vec{E}| = \frac{1}{2} \sigma r |\dot{\vec{B}}|, \quad (5.19)$$

der wiederum ein Magnetfeld induziert:

$$B_{ind} = -\frac{1}{4} r \sigma R^2 \dot{B} \quad (5.20)$$

Das Minus-Zeichen bedeutet, dass B_{ind} der Änderung \dot{B} entgegelläuft. Für eine sehr schnelle Änderung gilt $B_{ind} \rightarrow B$ und man erhält die Differentialgleichung

$$\dot{B} = -\frac{1}{\tau_M} B \quad \text{mit} \quad \tau_M = \frac{1}{4} r \sigma R^2 \quad (5.21)$$

Das Magnetfeld kann sich also nicht schneller ändern als:

$$B(t) = B_0 e^{t/\tau_M} \quad (5.22)$$

Auf die Ladungen in dem Ringstrom wirkt die Lorentz-Kraft, wodurch ein 'magnetischer Druck' P_m von außen auf das Plasma wirkt, der bei schneller Feldänderung mit der Zeitkonstante τ_M etwa der Energiedichte des Magnetfeldes entspricht:

$$P_m \approx j B R \approx \sigma R^2 B \dot{B} \approx \frac{B^2}{\mu_0}. \quad (5.23)$$

Falls der magnetische Druck viel größer als der Gasdruck ist,

$$P_m \gg P_{gas}, \quad (5.24)$$

was im interstellaren Raum häufig der Fall ist, breiten sich Störungen nicht mehr mit der üblichen Schallgeschwindigkeit aus, sondern mit der Geschwindigkeit der magnetohydrodynamischen ‘Alfvén-Wellen’:

$$c_{Alfvén} = \sqrt{\frac{P_m}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \rho}} B \quad (5.25)$$

Die typische Zeit, in der Plasma sich aus dem Schlauch (oder allgemeiner einem Gebiet der typischen Ausdehnung R) bewegen kann ist:

$$\tau_P = \frac{R}{c_{Alfvén}} \approx \frac{R}{B} \sqrt{\rho \mu_0}. \quad (5.26)$$

Wenn die Alfvén-Bedingung

$$\tau_P \ll \tau_M \implies \sqrt{\rho} \ll B \sqrt{\mu_0} \sigma R \quad (5.27)$$

erfüllt ist, wird das Magnetfeld vom Plasma mitgezogen, man sagt: das Magnetfeld ist im Plasma ‘eingefroren’. Für Parameter von Sternen werden die Dämpfungszeiten der Magnetfelder größer als das Alter des Universums; für Sonnenflecken ergeben sich etwa 1000 Jahre (hier spielen aber noch andere Effekte eine Rolle).

5.3 Fermi-Beschleunigung

Wir betrachten die Streuung geladener Teilchen an zufällig verteilten magnetisierten Plasmawolken (Abb. 5.4a), die sich isotrop mit den Geschwindigkeiten \vec{u}_i bewegen. In Abb. 5.4b betrachten wir einen einzelnen Streuprozess. Ein Teilchen läuft mit

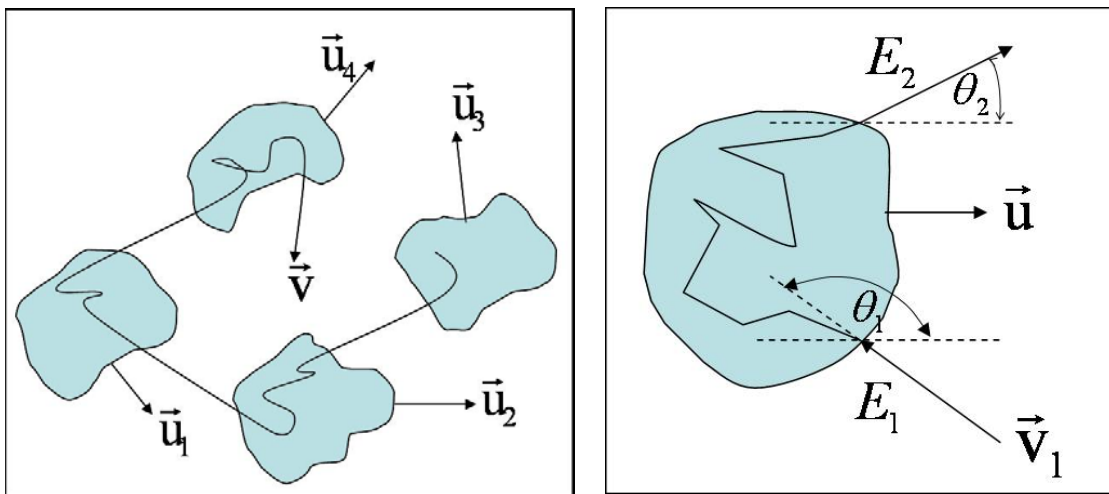


Abbildung 5.4: a) Stochastisch verteilte Plasmawolken, an denen Teilchen isotrop gestreut werden. b) Zur Fermi-Beschleunigung.

einer Geschwindigkeit \vec{v}_1 auf eine Wolke zu, die die Geschwindigkeit \vec{u} hat. Der Winkel zwischen den Geschwindigkeiten ist θ_1 :

$$\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = u v \cos \theta_1. \quad (5.28)$$

Das Teilchen habe relativistische Energien:

$$E_1 \approx p_1 \cdot c \implies v_1 \approx c \quad (5.29)$$

Nach einer isotropen Streuung in der Wolke tritt das Teilchen unter dem Winkel θ_2 mit der Energie E_2 aus.

Wir wollen nun die mittlere Energie $\langle E_2 \rangle$ berechnen. Zur Berechnung des mittleren Streuwinkels nutzen wir aus, dass die Streuung im Schwerpunktsystem der Wolke isotrop ist. Deshalb transformieren wir das einlaufende Teilchen zunächst in dieses System:

$$E'_1 = \gamma E_1 (1 - \beta \cos \theta_1) \quad (5.30)$$

mit

$$\beta = u/c \quad \text{und} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.31)$$

Die Streuung unter dem Winkel θ'_2 im Wolkensystem sei elastisch:

$$E'_1 = E'_2. \quad (5.32)$$

Um die Teilchenenergie im Laborsystem (interstellarer Raum) zu erhalten, muß wieder entsprechend zurücktransformiert werden:

$$\begin{aligned} E_2 &= \gamma E'_2 (1 + \beta \cos \theta'_2) \\ &= \gamma^2 E_1 (1 + \beta \cos \theta'_2) (1 - \beta \cos \theta_1) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Die Mittelung über die Streurichtungen ergibt wegen der Isotropie der Streuung im Wolkensystem (hier ist es wichtig, dass die Streuung in diesem System berechnet wurde!):

$$\langle \cos \theta'_2 \rangle = 0 \quad (5.34)$$

Das Gleiche gilt nicht für die θ_1 -Mittelung, weil die Stoßwahrscheinlichkeit von der Relativgeschwindigkeit der Stoßpartner abhängt:

$$\frac{dN}{dt d \cos \theta_1} \sim v_{rel} = u - v \cos \theta_1 \quad (5.35)$$

Die Mittelung über diese Verteilung ergibt:

$$\langle \cos \theta_1 \rangle = \frac{\int_{-1}^{+1} \cos \theta_1 (u - v \cos \theta_1) d \cos \theta_1}{\int_{-1}^{+1} (u - v \cos \theta_1) d \cos \theta_1} = -\frac{u}{3v} \stackrel{v=c}{\approx} -\frac{\beta}{3} \quad (5.36)$$

Mit diesen beiden Mittelungen ergibt sich für die mittlere Energie des gestreuten Teilchens:

$$\langle E_2 \rangle = \gamma^2 E_1 \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2\right) = E_1 \frac{1 + \frac{1}{3} \beta^2}{1 - \beta^2} = E_1 \left(1 + \frac{4}{3} \beta^2 + O(\beta^4)\right) \quad (5.37)$$

oder:

$$\left\langle \frac{\Delta E}{E} \right\rangle = \frac{\langle E_2 \rangle - E_1}{E_1} \approx \frac{4}{3} \beta^2 \quad (5.38)$$

Das heißt, dass der Energiezuwachs nur von 2. Ordnung in der Geschwindigkeit der Plasmawolke ist.

Es soll jetzt noch berechnet werden, wie das resultierende Energiespektrum aussieht. Allgemein ist die Energie nach k Stößen im Mittel:

$$\frac{E_k}{E_{k-1}} = \xi = 1 + \frac{4}{3} \beta^2 \implies E_k = E_0 \xi^k. \quad (5.39)$$

Wenn wir jetzt die Wahrscheinlichkeit P , dass ein Teilchen nach einem Stoß im System verbleibt, als konstant annehmen, können wir die Zahl der Teilchen mit Energien oberhalb E_k abschätzen:

$$N_k = N(E \geq E_k) = N_i \cdot \left(\sum_{m=k}^{\infty} P^m \right) = N_i \frac{P^k}{1-P} = N_0 P^k. \quad (5.40)$$

Mit

$$\frac{N_k}{N_0} = P^k \quad \text{und} \quad \frac{E_k}{E_0} = \xi^k \quad (5.41)$$

folgt:

$$\frac{\ln \frac{N_k}{N_0}}{\ln \frac{E_k}{E_0}} = \frac{\ln P}{\ln \xi} \implies \frac{N}{N_0} = \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\ln P / \ln \xi}. \quad (5.42)$$

Daraus ergibt sich schließlich das Energiespektrum:

$$\frac{dN}{dE} = \frac{dN}{dE}(E_0) \cdot \left(\frac{E}{E_0} \right)^{-1 + \ln P / \ln \xi}. \quad (5.43)$$

Wenn ξ und P Konstanten sind, ergibt sich also mit dem Fermi-Beschleunigungsmechanismus ein Potenzgesetz, wie es auch beobachtet wird. Mit einigen weiteren Annahmen kann man tatsächlich $\alpha = -1 + \ln P / \ln \xi \approx -(2.0 \dots 2.2)$ berechnen. Dass das gemessene Spektrum steiler ist ($\alpha \approx -2.7$), läßt sich damit erklären, dass die Kosmische Strahlung sehr lange in der Galaxis verweilt und dabei durch Streuung an der interstellaren Materie Energie verliert, was das Spektrum steiler macht.

Allerdings gibt es grundsätzlich Probleme, die es sehr unwahrscheinlich machen, dass die von β^2 abhängende Fermi-Beschleunigung für die hohen CR-Energien verantwortlich sein könnte:

- $u/c = \beta \leq 10^{-4}$, damit ist der Energiezuwachs sehr klein;
- die mittleren freien Weglänge für die Kollision mit einer Plasmawolke sind $O(1 \text{ pc})$, das heißt, es kommt nur zu etwa einer Kollision pro Jahr;
- der Energieverlust (zum Beispiel durch Ionisation) ist ähnlich groß wie der Energiezuwachs.

Damit ist dieser Mechanismus sicherlich nicht effizient genug. Auf der Suche nach einem Prozess, bei dem der Energiezuwachs linear mit β geht, findet man als Kandidaten die Schockwellen, die von Supernova-Explosionen ausgehen und eine Vorzugsrichtung für ihre Bewegung haben.

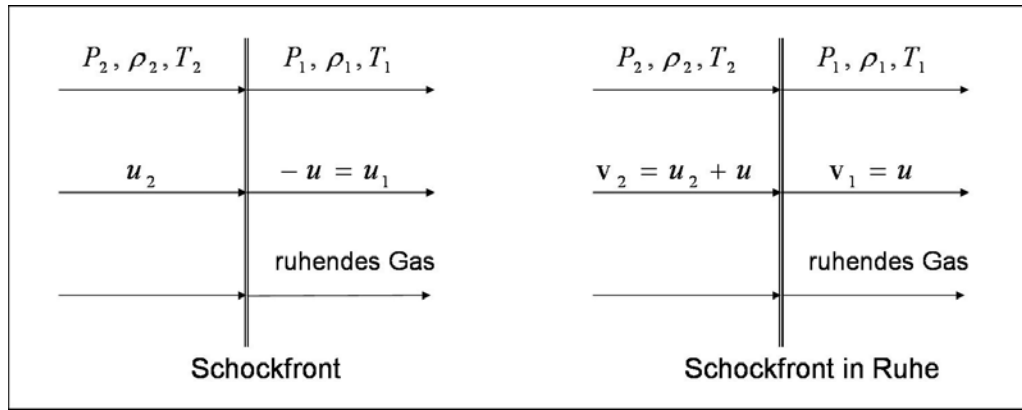


Abbildung 5.5: Zur Thermodynamik einer Schockwelle. Links: im System des ruhenden interstellaren Gases, rechts: im System, in dem die Schockfront ruht.

5.4 Schockbeschleunigung in Supernova-Resten

Die Beschleunigung von Kosmischer Strahlung in Schockwellen von Supernova-Explosionen ist eine gute Möglichkeit das CR-Spektrum zu erklären. Wir wollen zunächst die thermodynamischen Aspekte der Ausbildung einer Schockwelle diskutieren und dann den Beschleunigungsmechanismus in den Schockwellen, auch Fermi-Beschleunigung 1.Ordnung genannt, erklären.

5.4.1 Schockwellen

Eine Schockwelle ist eine Druckwelle, die sich mit Überschallgeschwindigkeit beziehungsweise mit mehr als der Alfvén-Geschwindigkeit bewegt:

$$u > c_{Schall} \quad \text{oder} \quad u > c_{Alfvén}. \quad (5.44)$$

Daraus ergibt sich:

- keine Störung vor der Wellenfront;
- Unstetigkeit an der Wellenfront, entsprechend dem ‘Schock’.

Eine Einsicht in das Verhalten von Schockwellen bietet die folgende vereinfachende thermodynamische Betrachtung (siehe [6], Kap.10). Das Gas vor ($i = 1$) und hinter ($i = 2$) der Schockfront wird charakterisiert durch Druck, Dichte und Temperatur (P_i, ρ_i, T_i) (Abb.5.5), die durch die ‘**Schockbedingungen**’ für die Erhaltung der Massen-, Energie- und Impulsflüsse miteinander verknüpft sind:

(i) Massenerhaltung:

$$j = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (5.45)$$

(ii) Energieerhaltung:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \epsilon_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \epsilon_2 \quad (5.46)$$

Das entspricht der Bernoulli-Gleichung für strömende Flüssigkeiten, wobei hier wegen der Kompressibilität der Gase die Änderung der inneren Energiedichte ϵ_i oder der Enthalpiedichte $\epsilon_i + P_i$ zu berücksichtigen ist.

(iii) Impulserhaltung:

$$P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2. \quad (5.47)$$

Die Berechnung der Verhältnisse P_2/P_1 , ρ_2/ρ_1 , T_2/T_1 erfolgt im Ruhesystem der Schockfront (Abb. 5.5 rechts). Man beachte, dass das Gas hinter der Schockfront nicht die gleiche Geschwindigkeit wie die Schockfront hat, weil sich die Schockfront durch aufgesammelte interstellare Gas relativ zu dem nachfolgenden Gas nach vorn bewegt. Zur weiteren Berechnung sind noch zusätzlich Annahmen über die Zustandsgleichung und andere Abhängigkeiten der thermodynamischen Größen zu machen. Hier soll angenommen werden, dass das Gas als **ideales Gas** zu beschreiben ist. Druck und innere Energie sind dann gegeben durch:

$$P = nkT, \quad \epsilon = \frac{f}{2}nkT = \frac{f}{2}P \quad (5.48)$$

Damit kann man in (ii) die Enthalpiedichte einsetzen:

$$\epsilon + P = \frac{f+2}{2}P = \frac{\gamma}{\gamma-1}P. \quad (5.49)$$

Dabei ist der Adiabatenkoeffizient γ :

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V} = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{3} \quad (5.50)$$

für einatomiges Gas (zum Beispiel Wasserstoff). Schließlich sind noch die Schallgeschwindigkeit c_i und die Mach-Zahl M_i gegeben durch:

$$c_i = \sqrt{\frac{\gamma P_i}{\rho_i}}, \quad M_i = \frac{v_i}{c_i} \quad (5.51)$$

Wir umgehen jetzt die Details der weiteren Rechnung¹ und beschränken uns auf den Fall eines ‘starken Schocks’

$$M_1 \gg 1. \quad (5.52)$$

Dann ergibt sich:

		für $\gamma = \frac{5}{3}$
$\frac{P_2}{P_1}$	$= \frac{2\gamma}{\gamma+1} M_1^2$	$= \frac{5}{4} M_1^2$
$\frac{\rho_2}{\rho_1}$	$= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \approx \frac{v_2}{v_1}$	$= 4$
$\frac{T_2}{T_1}$	$= \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} M_1^2$	$= \frac{5}{16} M_1^2$

Im Weiteren werden wir vor allem die Geschwindigkeit u_2 des Gases hinter der Schockfront benutzen. Aus

$$u = v_1 = 4v_2 = 4(u_2 + u) \quad (5.53)$$

folgt:

$$u_2 = -\frac{3}{4}u. \quad (5.54)$$

Die Schockfront hat also, wie oben bereits angemerkt, eine höhere Geschwindigkeit als das nachfolgende Gas, weil die Schockfront Material aufammelt und sich dadurch das Schockgebiet ausdehnt.

¹Details findet man in [6] und in der Doktorarbeit von N. Komin http://www-hess.physik.hu-berlin.de/public/dissertation/Nukri_Komin_Dissertation.pdf