Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Physik

Sommersemester 2009

Dr. U. Husemann, C. Lange

3. Übungsblatt zur Vorlesung Experimentelle Elementarteilchenphysik

Abgabe: Montag, 18. Mai 2009, in der Vorlesung

Aufgabe 8: (22 Punkte)

Die Massen der Quarks werden im Standardmodell durch den Higgs-Mechanismus erzeugt. In der Lagrangedichte ist dafür die Yukawa-Kopplung verantwortlich:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -f_u \left(\bar{Q}_L \tilde{\Phi} u_R + \bar{u}_R (\tilde{\Phi}^T)^* Q_L\right) - f_d \left(\bar{Q}_L \Phi d_R + \bar{d}_R (\Phi^T)^* Q_L\right)$$

Dabei ist $Q_L = (u,d)_L$ das linkshändige Quark-Dublett und $\tilde{\Phi} = i\tau^2 \Phi^*$.

i) Ersetzen Sie in der Lagrangedichte das Higgs-Feld Φ durch seinen Vakuumerwartungswert
$$\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$
und zeigen Sie, dass sich $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ in der Form $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -m_u (\bar{u}u) - m_d (\bar{d}d)$ schreiben lässt. Bestimmen Sie die Koeffizienten m_u und m_d.

ii) Aufgrund der Quarkmischung muss $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ als Matrixgleichung geschrieben werden: $m_u \bar{u}'_L u'_R \to m_u^{\alpha\beta} \bar{u}'^{\alpha}_L u'^{\beta}_R$ mit $\alpha, \beta = 1 \ldots 3$, analog für d-Quarks. Diagonalisieren Sie die Massenmatrizen $m_u^{\alpha\beta}$ und $m_d^{\alpha\beta}$ mit vier separaten unitären Transformationen $U^{u,d}_{L,R}$ für die links- und rechtshändigen Komponenten und zeigen Sie, dass die Quarkfelder in der Diagonalbasis folgende Form haben:
$$\bar{u}_{L,R} = \bar{u}'_{L,R} U^u_{L,R}, \quad \bar{d}_{L,R} = \bar{d}'_{L,R} U^d_{L,R}, \quad u_{L,R} = U^{u\dagger}_{L,R} u'_{L,R}, \quad d_{L,R} = U^{d\dagger}_{L,R} d'_{L,R}.$$

iii) Ohne Quarkmischung lautet der geladene schwache Strom, der an das W^- koppelt:
$$J^{+\text{CC}}_{\mu} = \bar{u}' \left[\gamma_\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\right] d'.$$
Transformieren Sie $J^{+\text{CC}}_{\mu}$ in die Diagonalbasis aus Aufgabenteil ii). Identifizieren Sie in dem Ausdruck die CKM-Matrix V_{CKM}.

iv) Wie lautet der kinetische Term $\bar{u}' \partial\!\!\!/ u' + \bar{d}' \partial\!\!\!/ d'$ in der Diagonalbasis? Was erwarten Sie aufgrund dieses Ergebnisses für die neutralen Ströme?

Aufgabe 9: (28 Punkte)

Bei einer Rotation um den Winkel θ um die y-Achse wird ein Drehimpulszustand $|j\ m\rangle$ in eine Linearkombination der $(2j+1)$ Zustände $|j\ m'\rangle$ $(m' = -j, -j+1, \dots, j-1, j)$ transformiert. Die Rotationsachse (hier die y-Achse) ist senkrecht zur alten und zur neuen Quantisierungsachse (z bzw. z'):

$$e^{-i\theta \hat{J}_y} |j\ m\rangle = \sum_{m'} d^j_{m,m'}(\theta) |j\ m'\rangle . \tag{1}$$

Hierbei sind $d^j_{m,m'}$ die Elemente der entsprechenden Rotationsmatrix. Für ein festes m' erhält man $d^j_{m,m'}$ aus der Beziehung

$$\langle j\ m'| e^{-i\theta \hat{J}_y} |j\ m\rangle = d^j_{m,m'}(\theta). \tag{2}$$

i) Betrachten Sie im folgenden den Zustand mit Drehimpuls $j = 1$. Berechnen Sie die Elemente der Rotationsmatrix mit Hilfe von Gleichung (2). Beweisen Sie dazu per vollständiger Induktion für $n = 1, 2, ...$ zunächst mindestens eine der folgenden Relationen:

$$\hat{J}_y^{2n} |1\ 0\rangle = |1\ 0\rangle \qquad \hat{J}_y^{2n-1} |1\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}i}(|1\ 1\rangle - |1\ {-1}\rangle)$$
$$\hat{J}_y^{2n} |1\ \pm 1\rangle = \pm\frac{1}{2}(|1\ 1\rangle - |1\ {-1}\rangle) \qquad \hat{J}_y^{2n-1} |1\ \pm 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}i} |1\ 0\rangle . \tag{3}$$

Stellen Sie den Rotationsoperator in Gleichung (1) als eine Potenzreihe in $\hat{J}_y$ dar, und ermitteln Sie mit den Relationen (3) die $d^j_{m,m'}$. Vergleichen Sie Ihr Resultat mit den Rotationsmatrizen der *Particle Data Group*.

Zur Erinnerung, es gilt:

$$\hat{J}_y = \frac{1}{2i}(\hat{J}_+ - \hat{J}_-) \qquad \text{mit } \hat{J}_+ |j\ m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\, |j\ (m+1)\rangle$$
$$\text{sowie } \hat{J}_- |j\ m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}\, |j\ (m-1)\rangle .$$

ii) Betrachten Sie den Prozess $e^+e^- \to \gamma \to \mu^+\mu^-$ bei hohen Energien $(v/c \to 1)$: Benutzen Sie die Rotationsmatrizen, um die $\cos\theta$-Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts herzuleiten.