Results

$$
\begin{aligned}
x_1 c_6^{\text{fin}} &= \frac{n_f}{N}\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\ln(1-x_1-x_2)-\frac{91}{108}+\frac{1}{4}\zeta(2)+\frac{1}{3}\ln(x_1+x_2)\right]\ln(1-x_1-x_2)\right.\\
&-\frac{1}{36}\frac{(52{x_1}^2x_2+47x_1{x_2}^2-45x_1x_2-14{x_2}^2+14{x_2}^3-19{x_1}^2+19{x_1}^3)}{(-1+x_1+x_2)(x_1+x_2)x_2}\mathrm{R}(x_1,1-x_1-x_2)\\
&+\frac{(x_1+2x_2)}{6x_2}\left[+\frac{1}{2}\ln(1-x_1)\ln(x_1)^2-\frac{1}{4}\ln(x_2)\mathrm{Li}(2,1-x_2)+\frac{1}{4}\mathrm{Li}(2,1-x_1)\ln(x_2)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\ln(x_1)\ln(1-x_1-x_2)^2+\mathrm{Li}(3,x_1)+\mathrm{Li}(3,1-x_1)\right]+\frac{1}{6}\mathrm{Li}(2,1-x_1-x_2)\\
&+\frac{({x_2}^2+{x_1}^2+4x_1x_2)}{12x_1x_2}\left[+\frac{1}{4}\ln(x_2)\ln(x_1)\ln(1-x_1-x_2)-\frac{1}{2}\ln(x_1+x_2)\ln(1-x_1-x_2)^2\right.\\
&\left.-\mathrm{Li}(3,1-x_1-x_2)-\mathrm{Li}(3,x_1+x_2)\right]+\frac{1}{24}\frac{({x_2}^2+5{x_1}^2+12x_1x_2)}{x_1x_2}\ln(x_1)\mathrm{R}(x_1,1-x_1-x_2)\\
&+\frac{1}{36}\frac{(-43x_1+31{x_1}^2+63x_1x_2+12-12x_2)}{(-1+x_1)(-1+x_1+x_2)}\ln(x_1)-\frac{1}{8}\frac{x_1(-1+x_1+3x_2)}{(-1+x_1)(-1+x_1+x_2)}\ln(x_1)^2\\
&-\frac{1}{24}\frac{(2{x_1}^2+{x_2}^2+6x_1x_2)}{x_1x_2}\ln(x_1)^2\ln(1-x_1-x_2)-\frac{4085}{2592}+\frac{1}{72}\zeta(3)\\
&-\frac{1}{24}\frac{(x_1+2x_1x_2-1+x_2)}{(-1+x_1+x_2)(-1+x_2)}\zeta(2)-\frac{1}{24}\frac{x_1(-1+4x_2)}{(-1+x_1+x_2)(-1+x_2)}\mathrm{R}(x_1,x_2)\\
&\left.+\frac{1}{24}\left[-\frac{3}{(1-x_2)}-\frac{15}{(1-x_1)}-\frac{2(4x_2-5)}{(1-x_1-x_2)}-\frac{8x_2}{(x_1+x_2)}\right]\mathrm{Li}(2,1-x_1)\right)\\
&+n_fN\left(-\frac{1}{72}\frac{(-82x_1+41{x_1}^2+14x_1x_2+41-41x_2)}{(1-x_1)(1-x_1-x_2)}\ln(x_1)^2-\frac{7}{36}\zeta(3)+\frac{4345}{2592}\right.\\
&+\frac{1}{36}\frac{(31-56x_1-31x_2+25{x_1}^2-20x_1x_2)}{(1-x_1)(1-x_1-x_2)}\ln(x_1)+\frac{1}{72}\left[-33{x_1}^2+58x_1+58-\frac{58}{(1-x_1)}\right.\\
&\left.+\frac{(9{x_1}^2+9x_1+58)}{(1-x_2)}-\frac{(4{x_1}^3-51{x_1}^2+58-69x_1)}{(1-x_1-x_2)}\right]\frac{\mathrm{R}(x_1,x_2)}{(1-x_1-x_2)(x_1+x_2)}\\
&-\frac{1}{12}\frac{(2{x_1}^2+x_1x_2+2{x_2}^2)}{(x_1+x_2)^2}\mathrm{R}_1(x_1,x_2)+\frac{1}{12}\frac{(2-4x_1-4x_2+2{x_1}^2+x_1x_2+2{x_2}^2)}{(1-x_1-x_2)^2}\mathrm{R}_2(x_1,x_2)\\
&+\frac{1}{72}(11+\frac{9}{(1-x_2)}+\frac{45}{(1-x_1)}-\frac{9(4x_1+1)}{(1-x_1-x_2)}-\frac{36x_1}{(x_1+x_2)})\mathrm{Li}(2,1-x_1)\\
&\left.-\frac{1}{8}\frac{x_1x_2\ln(x_1)}{(-1+x_1+x_2)^2}\zeta(2)+\frac{1}{144}\frac{(1340x_1-1023x_1x_2-670{x_1}^2+688{x_1}^2x_2-335)}{(-1+x_1)(-1+x_1+x_2)(-1+x_2)}\zeta(2)\right)\\
&+I\pi n_fN\left(\frac{1}{24}\frac{(-31+13x_1)x_2+31(1-x_1)^2}{(1-x_1)(1-x_1-x_2)}\ln(x_1)+\frac{1}{8}\frac{x_1x_2-8x_1+2+4{x_1}^2}{(1-x_1-x_2)^2}\mathrm{R}(x_1,x_2)\right.\\
&\left.+\frac{1}{12}\zeta(2)-\frac{5}{72}\right)+I\pi\frac{n_f}{N}\frac{1}{4}\left(\frac{x_1(-1+x_1+3x_2)}{(1-x_1)(1-x_1-x_2)}\ln(x_1)-\frac{1}{x_1}(x_2+2x_1)\mathrm{R}(x_2,1-x_1-x_2)\right.\\
&\left.-2\ln(1-x_1-x_2)-\frac{1}{2}\zeta(2)-\frac{191}{54}\right)+(x_1\leftrightarrow x_2)
\end{aligned}
$$